ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1 . 2
ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ

(1) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

Α = 3 + 23 + 19

Β = 8 +13 +45 -7

Γ = 3 + 0

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α = 3+23 +19 = (3+23)+19 = 26+19 = 45

Β = 8 +13 +45 -7 = (8 +13) +45 -7 =
21+45-7 = (21+45)+7 = 66-7 = 59

Γ = 3+0 =3

Για να προσθέσουμε τρείς ή και περισσότερους αριθμούς προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους δυο πρώτους , μετά το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον τρίτο και συνεχίζουμε.. προσέχοντας να βάζουμε μέσα σε παρένθεση τους αριθμούς που θέλουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε

Χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα μπορούμε να υπολογίσουμε πιο εύκολα τα αθροίσματα

(2) Να υπολογίσετε την παράσταση

Α = 3 + 18 +27

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α = 3+18+27 = 3+ 27+18 = (3+27)+18 =
= 30+18 = 48

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ

(3) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

Α = 3 · 6· 10

Β = 382·1

Γ = 25 ·0

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α = 3 · 6· 5 = (3·6)·5 = 18·5 = 120

Β = 382·1 = 382

Γ = 25·0 = 0

Για να πολλαπλασιάσουμε τρείς ή και περισσότερους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τους δυο πρώτους , μετά το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον τρίτο και συνεχίζουμε.. προσέχοντας να βάζουμε μέσα σε παρένθεση τους αριθμούς που θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε

ΠΡΟΣΟΧΗ : α·1 =α
α·0 = 0

(4) **Να υπολογίσετε τις παραστάσεις**

Α = 64 ·10

Β = 389 ·100

Γ = 97 ·1000

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό επι 10 ,100 ,1000 ,……. γράφουμε δεξιά του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει το 10 ή το 100 ή το 1000,…

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α = 64 ·100 = 640

Β = 389·100 = 38900

Γ = 97 ·1000 = 97000

(5) **Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα**

Α = 5+5+5+5+5+5

Β = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3

Το γινόμενο δυο φυσικών αριθμών είναι συντομογραφία ίδιων προσθετέων και αντίστροφα , αν έχουμε να προσθέσουμε πλήθος ίδιων προσθετέων είναι γινόμενο του πλήθους των προσθετέων επι τον προσθετέο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α = $\underbrace{5+5+5+5+5+5}_{6\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$ = 6 ·5 = 30

Β= $\underbrace{3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3}_{12\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$ = 12 ·3 =36

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ / ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ

(6) **Να υπολογίσετε τις παραστάσεις**

Α = 3·2 +1

Β = 4·6 + 3·9

Γ = 8·4 - 3·5

Δ = 1+4+3·5

Όταν έχουμε να κάνουμε πράξεις που σημειώνονται πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις / αφαιρέσεις ,

πρώτα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς

και μετά τις προσθέσεις / αφαιρέσεις

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α = 3·2 +1 = 6 +1 = 7

Β = 4·6 +3·9 = 24 +27 = 41

Γ = 8·4 -3 ·5 = 32 – 15 = 7

Δ = 1 +4+3·5 = 1+4+15 = 5 +15 =20

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ : $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$

ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΦΑΙΡΕΣΗ : $\alpha\cdot(\beta-\gamma) = \alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\gamma$

Προσοχή!

Η επιμεριστική ιδιότητα γράφεται και «ανάποδα»

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$$

$$\alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta-\gamma)$$

Το α πολλές φορές θα το λέμε και <u>κοινό παράγοντα</u>

(7) Να υπολογίσετε την παράσταση 32 ·(13 +7) με δύο τρόπους

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι 1^{ος} τρόπος : 32· (13 +7) = 32·20 = 640 και

(Κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στην παρένθεση και μετά τον πολλαπλασιασμό)

2^{ος} τρόπος 32· (13 +7) = 32 ·13 +32 · 7 = 416 + 224 = 640

(Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα)

(8) Να υπολογίσετε τα γινόμενα

α = 3·13 , β = 45·12 γ = 13·1001 δ = 28 ·111 και ε = 3·98 με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι α= 3 ·13 = 3·(10 + 3) = 3·10 + 3·3 = 30 + 9 = 39

β = 45·12 = 45(10 + 2) = 45·10 + 45·2 = 450 + 90 = 540

γ = 13·1001 =13 ·(1000+1) = 13·1000 +13 ·1 = 13000+13 = 13013

δ = 28 ·111 = 28·(100+10+1) = 28 ·100+28·10 +28·1 = 2800+280+28 =
= 3108

ε = 3·98 =3·(100-2) = 3·100 -3·2 = 300 – 6 = 294

«Σπάμε» τον ένα παράγοντα σε 10 , 100, 1000 συν ότι μένει και εφαρμόζω επιμεριστική ιδιότητα»

(9)   Να υπολογίσετε την παράσταση 2·3 +2·7 με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

2·3 +2·4 = 2· (3+4) = 2·7 =14

*Βλέπουμε ότι το 2 είναι **κοινός παράγοντας** και κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα»*

(10) Να υπολογίσετε την παράσταση 5·13 + 5·87 με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

5·13+5·87 = 5·(13+87) = 5·100 = 500

Βλέπουμε ότι το 5 είναι κοινός παράγοντας και κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα»

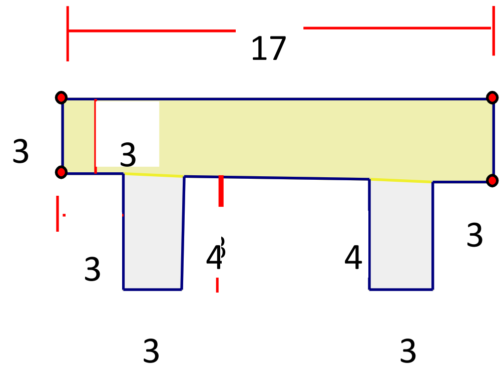
(11) Να υπολογίσετε την παράσταση 13·23+13·7+13·70 με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

13·27 + 13·7 +13·70 = 13· (23+7+70) = 13·100 = 1300

Βλέπουμε ότι το 13 είναι κοινός παράγοντας και κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα» .

Η επιμεριστική ιδιότητα εφαρμόζεται και αν έχουμε περισσότερους προσθετέους στην παρένθεση

(12) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του πάνω ορθογωνίου συν το εμβαδόν των δύο μικρών κάτω ορθογωνίων ποδιών.

Οπότε Ε = 3·17 + 3 · 4 + 3·4 = 3· (17 + 4 + 4) = 3·25 = 75

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1 . 3
ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ- ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

(1) Να γράψετε πιο γρήγορα τις παρακάτω παραστάσεις

Α = x+x+x+x+x Β = x·x·x·x·x Γ = 2·2·2·2·2·2·2 Δ = α·α·α·α

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

Α = x+x+x+x+x = 5·x

Β = x·x·x·x·x = x^5

Γ = 2·2·2·2·2·2·2 = 2^7

Δ = α·α·α·α = $α^4$

(2) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

Α = 2^3

Β = 3^5

Γ = 1^6

Δ = 7^1

$$α^ν = \underbrace{α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}_{ν\ φορές}$$

$$α^1 = α$$

$$1^ν = 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

Α = $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ φορές} = 8$ Β = $3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\ φορές} = 243$

Γ = $1^6 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{6\ φορές} = 1$ Δ = $7^1 = 7$

(3) Να βρείτε το τετράγωνο του 6 και τον κύβο του 5

$α^2$: το τετράγωνο του α

$α^3$: ο κύβος του α

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το τετράγωνο του 6 είναι το $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

Ο κύβος του 5 είναι $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

(4) Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα σε μορφή δύναμης

(α) 5·5·5·5·5·5 ·5 (β) 4·4·4·4·4·4·6·6·6·6 (γ) 1··1·1·1·1·1·1·1

(δ) α·α·α (ε) x·x·x (στ) 2·2·2·2·2·α·α·α·3·3·3·3

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = 5^7$,

Γράφω την βάση , εδώ το 5 ,και βάζω εκθέτη το πόσες φορές εμφανίζεται

(β) $4^6 \cdot 6^4$, **(γ)** 1^8 , **(δ)** α^3 , **(ε)** x^3 , **(στ)** $2^5 \cdot \alpha^3 \cdot 3^4$

(5) Να γράψετε τις δυνάμεις του 10 :$\mathbf{10^2}$, $\mathbf{10^3}$, $\mathbf{10^4}$, $\mathbf{10^5}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\mathbf{10^2 = 10 \cdot 10 = 1\underline{00}}$

$\mathbf{10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100 \cdot 10 = 1000}$

$\mathbf{10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000}$

$\mathbf{10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000}$

Γράφω το 1 και βάζω τόσα μηδενικά όσα ο εκθέτης

(6) Να γράψετε τον αριθμό 53.782 σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση δυνάμεων του 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$53.782 = 5 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 = 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2$

(7) Να υπολογίσετε το τετράγωνο του 6 και τον κύβο του 5 .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το τετράγωνο του 6 είναι το $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

Ο κύβος του 5 είναι $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

(8) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = (4\cdot3 - 2)^2 - 3\cdot6^2 + 8^2 : 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$B = (2^2\cdot3 - 2)^2 - 3\cdot6^2 + 8^2 : 2$ **(Πρώτα κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις)**

$= 3^2 + 2\cdot7 + 4^2\cdot2$ **(Έπειτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις)**

$= 9 + 2\cdot7 + 16\cdot2$ (**Στην συνέχεια κάνουμε πολλαπλασιασμούς /διαιρέσεις)**

$= 9 + 14 + 32$ (**Και τέλος τις προσθέσεις και αφαιρέσεις)**

$= 55$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1 . 4
ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ - ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

(1) Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις

(α) $140 = 40\cdot 3 + 20$ **(β)** $950 = 26\cdot 35 + 40$

(γ) $100 = 12\cdot 8 + 4$ **(δ)** $300 = 18\cdot 16 + 12$

$Δ = δ\cdot π + υ$

$0 \leq υ < δ$

προσοχή , το υπόλοιπο είναι μικρότερο του διαιρέτη και μεγαλύτερο του 0

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Επειδή υ = 20, το οποίο είναι μικρότερο από το 40 και μεγαλύτερο του 3, η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 40

(β) Επειδή υ = 40, το οποίο είναι μεγαλύτερο και από το 35 και από το 26, η ισότητα αυτή δεν είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης.

(γ) Επειδή $υ = 4$, το οποίο είναι μικρότερο και από το 12 και από το 8,

η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης, με διαιρέτη το 12 αλλά και με το 8.

(δ) Επειδή $υ = 12$ το οποίο είναι μικρότερο και από το 18 και από το 16

η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης και με διαιρέτη το 18 και με διαιρέτη το 16

(4) **Αν ένας αριθμός διαιρεθεί με το 12 δίνει πηλίκο 5 και υπόλοιπο 3. Ποιος είναι ο αριθμός ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο ζητούμενος αριθμός, σύμφωνα με την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης,

θα είναι ίσος με : $Δ = 12·5 + 3 = 60 + 3 = 63$

(5) **Αν σήμερα είναι Τετάρτη, τι μέρα θα είναι μετά από 198 ημέρες ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η επόμενη Τετάρτη θα είναι μετά από 7 ημέρες και από εκεί και πέρα κάθε 7 ημέρες θα είναι πάλι Τετάρτη.

Όμως η διαίρεση του 198 με το 7 δίνει πηλίκο 28 και υπόλοιπο 2 . Δηλαδή:

$198 = 7·28 + 2$. Αυτό σημαίνει ότι μετά από 198 ημέρες έχουν περάσει 28 εβδομάδες και 2 ημέρες . Επομένως θα είναι ημέρα Παρασκευή.

(6) **Να βρείτε ποια είναι τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού με το 7.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θα πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης να είναι ένας αριθμός

μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός αλλά μικρότερος του διαιρέτη,

δηλαδή πρέπει $0 \leq υ < 7$.

Άρα το υπόλοιπο υ μπορεί να είναι 0,1,2,3,4,5,6.

(7) **Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι, αν διαιρεθούν με το 4 δίνουν πηλίκο 10, με τη χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γνωρίζουμε $Δ = δ \cdot π + υ$ με $0 \le υ < δ$ Αφού ο διαιρέτης είναι το 4 το υπόλοιπο μπορεί να είναι ίσο με 0 ,1,2,3 . Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο είναι $π=10$ άρα από την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα έχουμε:

αν $υ=0$, τότε: $Δ = 4 \cdot 10 + 0 = 40$
αν $υ=1$, τότε: $Δ = 4 \cdot 10 + 1 = 41$
αν $υ=2$, τότε: $Δ = 4 \cdot 10 + 2 = 42$
αν $υ=3$, τότε: $Δ = 4 \cdot 10 + 3 = 43$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1 . 5
ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ – ΕΚΠ - ΜΚΔ

(1) Να γραφούν τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 5 ,6, και 10 . Στην συνέχεια να βρεθούν τα κοινά τους πολλαπλάσια και το Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πολλαπλάσια του 5 : **0**, 5, 10, 15, 20, 25, **30**, 35, 40, 45, 50, 55, **60**, ……
Πολλαπλάσια του 6 : **0**,6, 12, 18, 24, **30**, 36, 42, 48, 54, **60**, 66, …….
Πολλαπλάσια του 10: **0**,10, 20, **30,** 40, 50, **60**, 70, 80, 90, 100,…..

Άρα τα κοινά τους πολλαπλάσια είναι 0, 30, 60,…..
Και επομένως ΕΚΠ(30,60,90) = 30

Το ΕΚΠ είναι το μικρότερο, μη μηδενικό από τα κοινά πολλαπλάσια

Παρατηρούμε ότι το 5 διαιρεί όλα τα πολλαπλάσια του και όλα τα πολλαπλάσια του 5 διαιρούνται από το 5 .
Το ίδιο ισχύει για το 6 και για όλου ς γενικά τους φυσικούς αριθμούς

- **Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του**
- ***Κάθε φυσικός που διαιρείται από ένα άλλο είναι πολλαπλάσιό του***

(2) Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 8 διαιρεί τον αριθμό 4000

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο αριθμός 4000 είναι πολλαπλάσιο του 8 αφού 4000 : 8 = 500

Δηλαδή το 8 είναι διαιρέτης του 4000

Αφού ο αριθμός 8 διαιρεί το 40, τότε διαιρεί και κάθε πολλαπλάσιό του .

Όμως 4000 = 40 ·100 , δηλαδή το 4000 είναι πολλαπλάσιο του 40

Άρα, ο αριθμός 4000 διαιρείται με τον αριθμό 8 .

Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλο , τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του

(3) Βρες τους διαιρέτες των αριθμών 32 , 48 , 80
Στην συνέχεια να βρεθούν οι κοινοί διαιρέτες και ο Μέγιστος Κοινός διαιρέτης πολλαπλάσιό τους .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Διαιρέτες του 32 **:** **<u>1</u>**, **<u>2</u>**, **<u>4</u>** ,**<u>8</u>**, **<u>16</u>**, 32

Διαιρέτες του 48 **:** **<u>1,</u>** **<u>2</u>**,3 **<u>,4</u>**, 6 , **<u>8</u>**, 12,**<u>16</u>**, 24, 48

Διαιρέτες του 12 **:** **<u>1, 2</u>**,**<u>4</u>**,5,**<u>8</u>**,10,**<u>16</u>**,24,48

Οι κοινοί τους διαιρέτες είναι : 1,2,4,8,16

Και επομένως ΜΚΔ(32, 48, 80) = 16

Ο ΜΚΔ είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες

(4) **Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 18, 45 και 79 είναι πρώτοι**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το 18 έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1,2,3,6,9,18 . Επομένως,είναι σύνθετος.

Το 45 έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1,3,5,15,45 Επομένως, είναι σύνθετος.

Το 79 έχει διαιρέτες μόνο τους αριθμούς 1 και 79, δηλαδή είναι πρώτος.

¨Ενας αριθμός λέγεται πρώτος αν διαιρείτε μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα

(5) **Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 12 , 7 είναι πρώτοι μεταξύ τους**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι διαιρέτες του 12 είναι 1,2,3,4, 6, 12

Οι διαιρέτες του 25 είναι 1,5,25

Άρα Μ.Κ.Δ (12,25) = 1 και επομένως οι 12, 25 είναι πρώτοι μεταξύ τους

Οι αριθμοί α,β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν ΜΚΔ(α,β)=1

(6) **Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 18 , 24 είναι πρώτοι μεταξύ τους**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι διαιρέτες του 18 είναι 1,2,3, 6 , 9 , 18

Οι διαιρέτες του 24 είναι 1,2,3,4,6,8,12,24

Άρα Μ.Κ.Δ (12,25) = 6 και επομένως οι 18, 24 **Δεν** είναι πρώτοι μεταξύ τους

(7) **Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεων τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το πλήθος των ημερών που θα περάσουν για να ξανασυναντηθούν στον κινηματογράφο πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 10, 12. Επειδή όμως ΕΚΠ(10, 12) = 60, θα ξανασυναντηθούν για πρώτη φορά μετά από 60 ημέρες.

Τότε θα είναι 9 Μαΐου διότι θα έχουν περάσει 21 ημέρες του Μαρτίου +

30ημέρες του Απριλίου + 9 ημέρες του Μαΐου = 60 ημέρες

Ο Γιάννης θα έχει πάει μέχρι τότε 60**:** 10 = 6 φορές, επομένως μόνος του θα έχει πάει 5 φορές .Και ο Νίκος θα έχει πάει 60 **:** 12 = 5 φορές, άρα μόνος του 4 φορές

(8) **Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 4 χρόνια, η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 6 χρόνια. Αν το 2011 έβγαλαν και οι τρείς εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρείς μαζί νέο μοντέλο ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το πιο μικρό διάστημα σε έτη που θα περάσει για να ξαναβγάλουν για πρώτη φορά και οι τρείς εταιρείες νέο μοντέλο πρέπει να είναι ίσο με το ΕΚΠ των αριθμών 4 , 3 και 6. Επειδή όμως ΕΚΠ(4, 3, 6) = 12 και το 2011 έβγαλαν οι εταιρείες νέο μοντέλο, θα ξαναβγάλουν νέο μοντέλο το 2011 + 12 = 2023

(9) **Συμπλήρωσε το κενό με κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός που θα σχηματισθεί να διαιρείται με το 9.**

(α) 6…5 (β) 69…3 (γ) 601…

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 9. Άρα

(α) Επειδή 6 + 5 = 11 και ο αμέσως μεγαλύτερος του 11 αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το 18, στη θέση του κενού πρέπει να μπει το 7. Τότε ο αριθμός είναι ο 674.

(β) Επειδή 6 + 9 + 3 = 18 που διαιρείται με το 9 και ο αμέσως μεγαλύτερος του 18 αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το 27, στη θέση του κενού μπορεί να μπει το 0, τότε ο αριθμός είναι ο 6903, ή το 9 και τότε ο αριθμός είναι ο 6993.

(γ) Επειδή 6 + 1 = 7 και ο αμέσως μεγαλύτερος του 7 αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το 9, στη θέση του κενού πρέπει να μπει το 2. Τότε ο αριθμός είναι ο 6012

(10) **Στη θέση …. να βάλεις ένα κατάλληλο ψηφίο ώστε:**

α) Ο 5 …. 6 να διαιρείται με το 3

β) Ο 3 …. 4… να διαιρείται με το 2 και με το 3

γ) Ο 4 …. 9 …. να διαιρείται με το 3 και με το 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) **<u>Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 3.</u>** Άρα επειδή 6+5=11 και οι αμέσως μεγαλύτεροι του 11 αριθμ οί που διαιρούνται με το 3 είναι το 12 το 15 και το 18, στη θέση του κενού πρέπει να μπει το 1 ή το 4 ή το 7. Τότε ο αριθμός είναι ο 516 ή 546 ή 576

β) **<u>Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 όταν τελειώνει σε 0,2,4,6,8</u>**
<u>Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 3.</u>
Άρα επειδή 3+4 , αν το τελευταίο ψηφίο είναι π.χ. 2 τότε αφού 3+4+2 =9 , το δεύτερο ψηφίο θα πρέπει να είναι 0 ή 3 ή 6 ή 9
Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί 3042, 3342, 3642, 3942 .
Αν το τελευταίο ψηφίο είναι 4 ή 6ή 8 ή 0 προκύπτουν αντίστοιχα άλλοι αριθμοί
γ) Με ίδιο σκεπτικό όπως πριν προκύπτουν οι αριθμοί 4 095 , 4690 αφού , **<u>ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν τελειώνει σε 0 ή 5</u>**

(11) α αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
(α) 78 (β) 348 (γ) 1.210 (δ) 2.344

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

78	2	348	2	1210	2	2344	2
39	3	174	2	605	5	1172	2
13	13	87	87	121	11	586	2
1		1		11	11	293	293
				1		1	

Άρα $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$, $348 = 2^2 \cdot 87$, $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$, $2344 = 2^3 \cdot 293$

(12) Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 84 και 120 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς , εδώ το 84 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως: σχηματίζουμε το γινόμενο των **<u>κοινών πρώτων παραγόντων</u>** τους με εκθέτη καθενός **<u>τον μικρότερο από τους εκθέτες του.</u>**
Είναι
$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ (*Οι κοινοί πρώτοι διαιρέτες είναι το 2 και το 3*)
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ (*Η μικρότερη δύναμη του 2 είναι το 2 και του 3 το 1*)
ΜΚΔ (84,120) = $2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

(13) **Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών 6 και 8 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το Ε ΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς , εδώ το 6 και το 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως: σχηματίζουμε το γινόμενο των **κοινών και μη κοινών πρώτων παραγόντων** τους με εκθέτη καθενός **τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του**

Είναι

$6 = 2 \cdot 3$

$8 = 2^3$ (*Η μεγαλύτερη δύναμη του 2 είναι το 3 και του 3 το 1*)

ΕΚΠ (6,8) = $2^3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

(14) Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορούμε να σχηματίσουμε από 48 λευκά άνθη, 80 ροζ και 112 κίτρινα ; Πόσα άνθη από κάθε χρώμα θα περιλαμβάνει κάθε ανθοδέσμη ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο αριθμός των δεμάτων θα είναι ίσος με το ΜΚΔ των 48, 80, 112

Είναι $48 = 2^4 \cdot 3$

$80 = 2^4 \cdot 5$

$112 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

Άρα ΜΚΔ(48,80,112) = $2^2 = 4$

Επομένως γίνονται 4 όμοια δέματα , που το καθένα θα περιέχει

48:4 = 12 λευκά άνθη

80:4 = 20 ρόζ και

112:4 = 28 κίτρινα