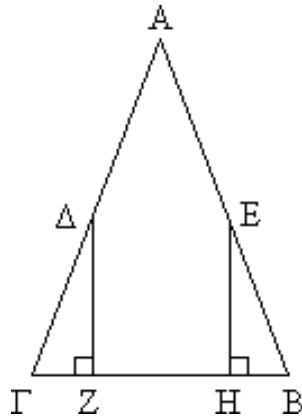
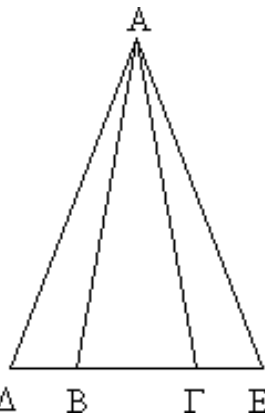


ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ Β.1.1
ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1)

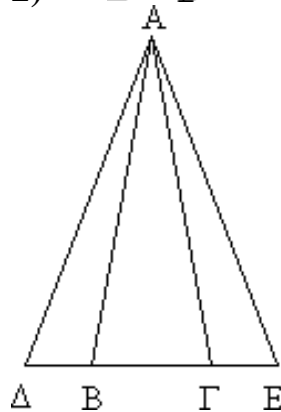


Δεδομένα	Ζητούμενα
$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές $AD = AE$ $DZ \perp BG$ $EH \perp BG$	$GZ = HB$



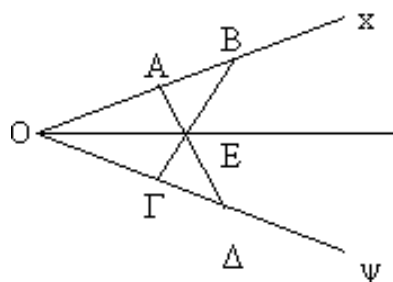
Δεδομένα	Ζητούμενα
$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές $AB = GE$	$\triangle ADE$ ισοσκελές

2)

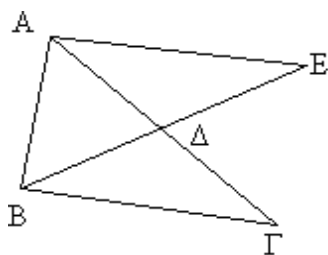


Δεδομένα	Ζητούμενα
$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές $AB = GE$	$\triangle ADE$ ισοσκελές

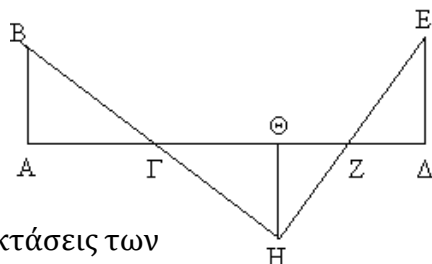
3)



Δεδομένα	Ζητούμενα
OE διχοτόμος $\hat{\alpha}$ $OA = OG$ $AB = GD$	(α) $AE = GE$ (β) $\triangle BED$ ισοσκελές



Δεδομένα	Ζητούμενα
$\triangle AB\Gamma$ τυχαίο $B\Delta$ διάμεσος $B\Delta = \Delta E$	4) (α) $B\Gamma = \Gamma E$ (β) $B\Gamma \parallel \Gamma E$



Δεδομένα	Ζητούμενα
$BA \perp A\Delta$ $EA \perp A\Delta$ $\Theta H \perp A\Delta$ $B\Gamma = \Gamma H$ $EZ = ZH$	5) (α) $AB = H\Theta$ (β) $AB = E\Delta$ 6) Στις ίσων πλευρών AB και

προεκτάσεις των

ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ABΓ (προς τη βάση ΒΓ) παίρνουμε τα τμήματα BE = ΓΖ. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων E και Z από τη βάση ΒΓ είναι ίσες

7) Να δείξετε ότι οι διάμεσοι ισοσκελούς τριγώνου που φέρουμε από τις κορυφές των παρά τη βάση γωνιών του είναι ίσες.

8) Σε τυχαίο τρίγωνο ABΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ. Στην προέκταση της ΑΔ να πάρετε τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Να δείξετε ότι:

(α) $\angle B\Delta = \angle E\Delta$ και (β) $\angle A\Delta = \angle E\Delta$

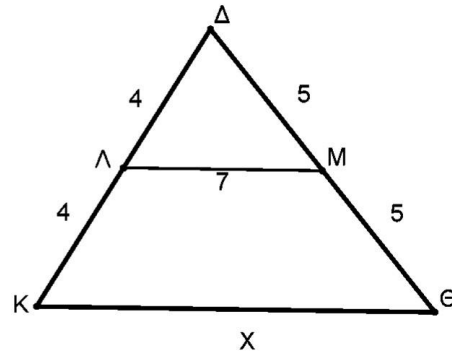
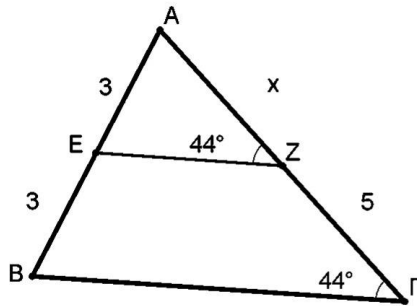
9) Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ να φέρετε την προέκταση της πλευράς ΓΑ (προς το Α) και τη διχοτόμο ΑΧ της εξωτερικής γωνίας της Α που σχηματίζεται. Να φέρετε τη ΒΗ \perp ΑΧ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε και να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΑΓ.

10) Σε τετράγωνο ABΓΔ να πάρετε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα στις πλευρές ΑΔ και ΔΓ τέτοια ώστε ΔΕ = ΔΖ. Να δείξετε ότι $\angle ABE = \angle BZ\Gamma$ και αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ να δείξετε ότι ΒΜ \perp ΕΖ.

11) Να προεκτείνετε και προς τις δύο πλευρές της τη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ABΓ, να πάρετε τμήματα ΒΔ = ΓΕ και πάνω στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΖ = ΑΗ. Να δείξετε ότι ΖΔ = ΕΗ και να συγκρίνετε τις αποστάσεις των σημείων Ζ και Η από τη βάση ΒΓ.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ Β.1.2
ΛΟΓΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

12) Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το x

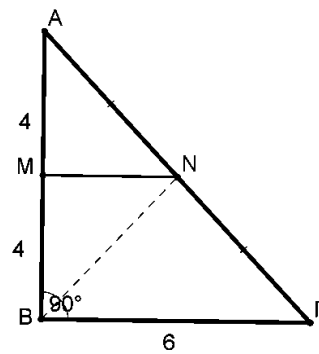


13) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $B = 90$ μοίρες είναι $AM = MB = 4\text{cm}$, $BΓ = 6\text{cm}$ και N μέσο της AΓ.

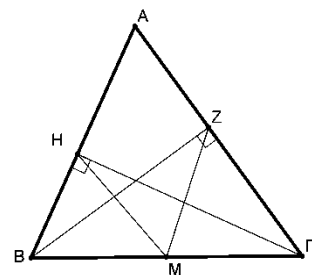
Να υπολογίσετε:

- α) Το μήκος της υποτεινουσας AΓ.
- β) Το μήκος της διαμέσου BN.
- γ) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος MN
- δ) Να υπολογίσετε τους λόγους :

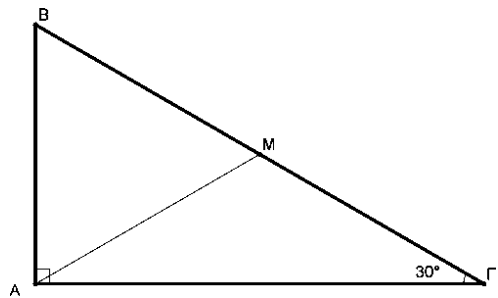
$$\frac{AB}{AM}, \frac{AΓ}{BΓ}, \frac{BN}{NΓ}, \frac{BΓ}{MN}, \frac{BN}{AN}, \frac{MN}{BΓ}$$



14) Σε ένα τρίγωνο ABΓ, τα K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών AB, BΓ, AΓ αντίστοιχα. Αν $AB = 12\text{cm}$, $AΓ = 16\text{cm}$, $BΓ = 14\text{cm}$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου KΛM.



15) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, BZ και GH είναι δύο ύψη του και M το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MHZ είναι ισοσκελές.



16) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 90$ μοίρες και $\Gamma = 30$ μοίρες και AM διάμεσος
 α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$
 β) Να αποδείξετε ότι $AM = MB$
 γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{B}{2}$

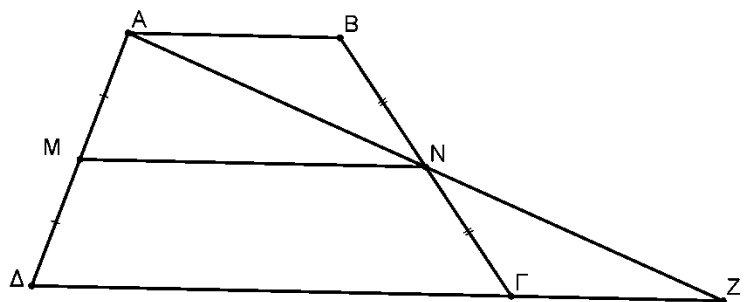
17) Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα M, N είναι μέσα των $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Αν η AN τέμνει την προέκταση της $\Gamma\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα ABN και ΔNZ είναι ίσα.

β) $MN \parallel \Gamma\Delta$

γ) $MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$



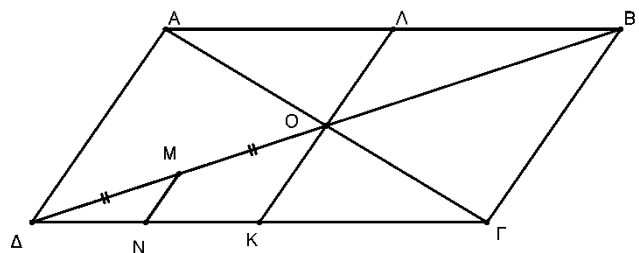
18) Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A\Delta \parallel K\Lambda \parallel B\Gamma$ και O το κέντρο του παραλληλογράμμου. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα K, Λ είναι μέσα των $\Delta\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

β) Το N είναι μέσο του ΔK

γ) $2 MN = OK$

δ) $MN = \frac{B}{4}$



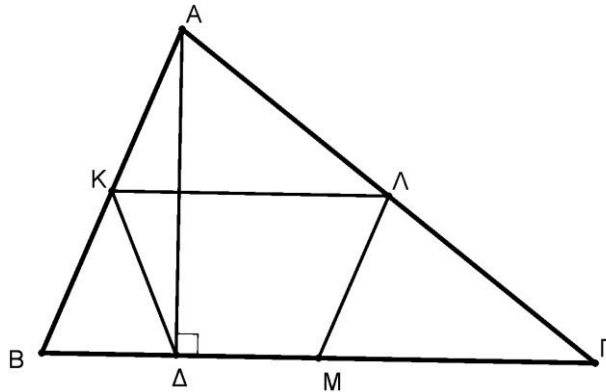
19) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος $A\Delta$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $K\Lambda \parallel B\Gamma$

β) $2 \cdot \Lambda M = AB$

γ) $KΔ = \frac{AB}{2}$

δ) Το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο



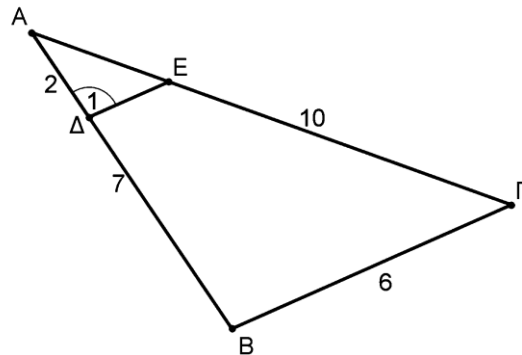
ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ Β.1.5
ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

20) Από σημείο Δ της υποτεινούσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την κάθετη στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε.

(α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι όμοια.

(β) Αν $BΔ = 3 \text{ cm}$, $ΔΓ = 7 \text{ cm}$ και $ΔΕ = 4 \text{ cm}$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και του τμήματος ΒΕ.

21) Αν $AB = 7 \text{ cm}$,
 $ΑΓ = 10 \text{ cm}$, $ΒΓ = 6 \text{ cm}$,
 $ΑΔ = 2 \text{ cm}$ και $ΔΕ // ΒΓ$, να
υπολογιστούν τα μήκη των
ευθυγράμμων τμημάτων ΑΕ και ΔΕ.



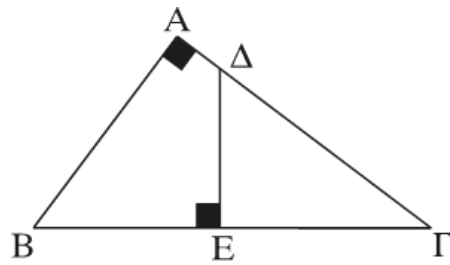
22) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel ΓΔ$), το σημείο τομής Ο των διαγωνίων και η παράλληλη από το Ο προς τη ΓΔ που τέμνει τις ΑΔ, ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΔΓ είναι όμοια

β) τα τρίγωνα ΒΟΖ και ΒΔΓ είναι όμοια

23) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) $\Delta E \perp B\Gamma$ $AB = 6$, $AG = 8$ και $\Delta E = 4$, τότε το $E\Gamma$ ισούται με:

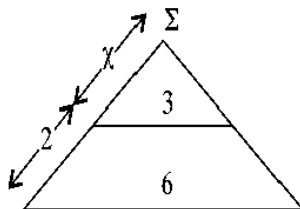
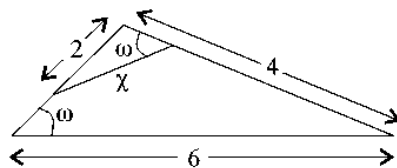
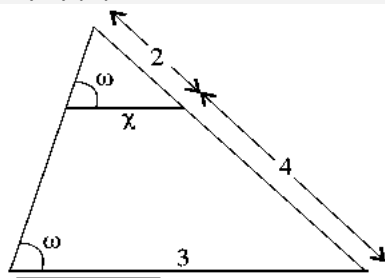
- (α) $\frac{16}{3}$ (β) $\frac{20}{3}$ (γ) 5
 (δ) 8 (ε) $8 + \sqrt{3}$



24)

Η τιμή του x που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση της στήλης (A), για κάθε σχήμα, δίνεται με αριθμό στη στήλη (B). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα σχήματα με τους αντίστοιχους αριθμούς.

Στήλη (A)



Στήλη (B)

- 1
1,5
2
3
4
4,5

25) Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος του $B\Delta$. Έστω M, K τα μέσα των $B\Gamma$ και BA αντίστοιχα.

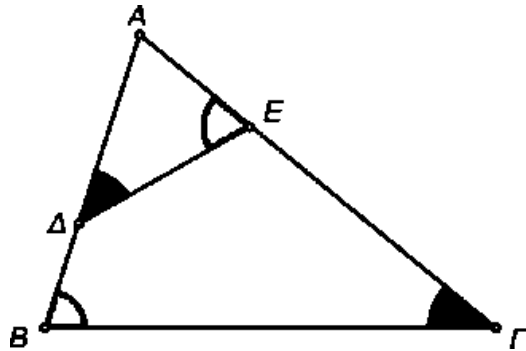
(α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Delta M$ είναι όμοια και βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.

(β) Γράψτε τις ισότητες των γωνιών των δύο τριγώνων που προκύπτουν από την ομοιότητα τους.

26) Κάποια χρονική στιγμή η σκιά ενός δένδρου στο οριζόντιο έδαφος είναι 14 m . Την ίδια χρονική στιγμή ένα κατακόρυφο ραβδί μήκους 4 m έχει σκιά 7 m . Να υπολογίσετε το ύψος του δένδρου.

- 27) Στο διπλανό σχήμα ισχύουν
 $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$, $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ και
 $AB = 6 \text{ cm}$, $A\Gamma = 10 \text{ cm}$,
 $B\Gamma = 12 \text{ cm}$, $A\Delta = 4 \text{ cm}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι τα
 τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι
 όμοια.
 (β) Να γράψετε τους ίσους
 λόγους των αντίστοιχων
 πλευρών.
 (γ) Να υπολογιστούν τα AE
 και ΔE .



- 28) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 5 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 7 \text{ cm}$. Στη πλευρά AB
 $A\Delta = \frac{4}{5} AB$
 παίρνουμε το Δ ώστε $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να βρείτε το σημείο E της $A\Gamma$ για το οποίο είναι
 $\Delta E \parallel B\Gamma$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ B.1.6 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ

- 29) Ένα τρίγωνο έχει βάση 8 cm και εμβαδόν 20 cm^2 . Να υπολογίσετε το
 εμβαδόν ενός άλλου τριγώνου που είναι όμοιο με το $AB\Gamma$ και έχει βάση 4 cm .
- 30) Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου έχουν μήκη $15, 3, 9, 10 \text{ cm}$ αντίστοιχα. Να
 υπολογίσετε τις πλευρές ενός όμοιου τετραπλεύρου που έχει τετραπλάσιο
 εμβαδόν.
- 31) Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
 (α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.
 (β) Το εμβαδόν του ΔEZ είναι $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του $AB\Gamma$.
- 32) Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου είναι $AB = 3 \text{ cm}$ και
 $A\Gamma = 5 \text{ cm}$. Φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$
 (α) Να αποδείξετε ότι τα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια.
 (β) Αν το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει εμβαδόν 9 cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του $A\Gamma\Delta$.
- 33) Δύο όμοια πολύγωνα έχουν εμβαδά 15 cm^2 και 135 cm^2 . Να
 υπολογίσετε το λόγο ομοιότητας τους.
- 34) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
 το τραπέζιο $B\Delta E\Gamma$ έχει τριπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο $A\Delta E$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- 35) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε το σημείο $M(-3,3)$ και να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{x} \hat{O} M$.
- 36) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε το σημείο $M(-3,0)$ και να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{x} \hat{O} M$.
- 37) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε το σημείο $M(-6,-8)$ και να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{x} \hat{O} M$.
- 38) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 135° .
- 39) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε τα σημεία $A(5,5)$ και $B(-5,5)$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου OAB .
- 40) Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:
α) $\eta\mu 110^\circ$ β) $\eta\mu 150^\circ$ γ) $\sigma\upsilon\nu 125^\circ$ δ) $\epsilon\phi 100^\circ$
- 41) Αν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου να δείξετε ότι:
α) $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$ β) $\sigma\upsilon\nu(A+B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$ γ) $\epsilon\phi(A+B) = -\epsilon\phi\Gamma$
- 42) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 $A = \sigma\upsilon\nu 120^\circ + 3\eta\mu 150^\circ - \epsilon\phi 135^\circ$ $B = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \eta\mu 150^\circ \cdot \epsilon\phi 120^\circ$
- 43) Αν $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ και $\eta\mu^2 x = \frac{1}{4}$ να βρείτε το x .
- 44) Αν A, B, Γ, Δ είναι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου να δείξετε ότι:
α) $\eta\mu A = \eta\mu B$ β) $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma + \sigma\upsilon\nu \Delta = 0$
- 45) Να αποδείξετε ότι:
α) $1 + \epsilon\phi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ β) $1 + \frac{1}{\epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$
- 46) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\eta\mu^2 \omega} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega} = \frac{1}{\eta\mu^2 \omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \omega}$
- 47) Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\phi \omega + \frac{1}{\epsilon\phi \omega} = \frac{1}{\eta\mu \omega \cdot \sigma\upsilon\nu \omega}$
- 48) Να αποδείξετε ότι: $-(\eta\mu \alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha)^2 - (\eta\mu \alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha)^2 = 4\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha$

-
- 49)** Να αποδείξετε ότι: $1 - (\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 = 4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha$
- 50)** Να αποδείξετε ότι: $(\kappa\eta\mu\alpha + \lambda\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (\lambda\eta\mu\alpha - \kappa\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \kappa^2 + \lambda^2$
- 51)** Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\varphi^2\alpha - 1}{\epsilon\varphi^2\alpha + 1} = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$
- 52)** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$
- 53)** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\alpha = \beta = 10$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Να βρείτε τη γωνία Γ και τη γωνία Γ καθώς και την πλευρά γ.
- 54)** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu\beta = \alpha$.
- 55)** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\beta = 20\text{cm}$ και $\hat{A} = 30^\circ$ και $\Gamma = 80^\circ$. Να βρείτε τις πλευρές α και β.