ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ Α . 3. 1 - 3.2 - 3.3

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Γραμμική Εξίσωση με 2 αγνώστους αx + βy = γ

Παράδειγμα η εξίσωση 2x + y = 6

για x = 1 και y = 4 η εξίσωση επαληθεύεται ;...

για x = 2 και y = 3 η εξίσωση επαληθεύεται ;...

Το ζεύγος των αριθμών (1,4) που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται *λύση της εξίσωσης*

Γενικά

Λύση της εξίσωσης αx + βy = γ λέγεται κάθε ζευγάρι (x,y) αριθμών που την επαληθεύει .

για x = 0 και y = 6 η εξίσωση επαληθεύεται ;...

για x = 2 και y = 2 η εξίσωση επαληθεύεται ;...

<u>Γενικότερα η εξίσωση αx + βy = γ έχει άπειρες λύσεις . Για να τις βρούμε βάζουμε μια τιμή στο x και λύνουμε ως προς y</u>

Για x = - 1 έχουμε 2·(-1) + y = 6 οπότε -2 + y = 6 οπότε y = 8

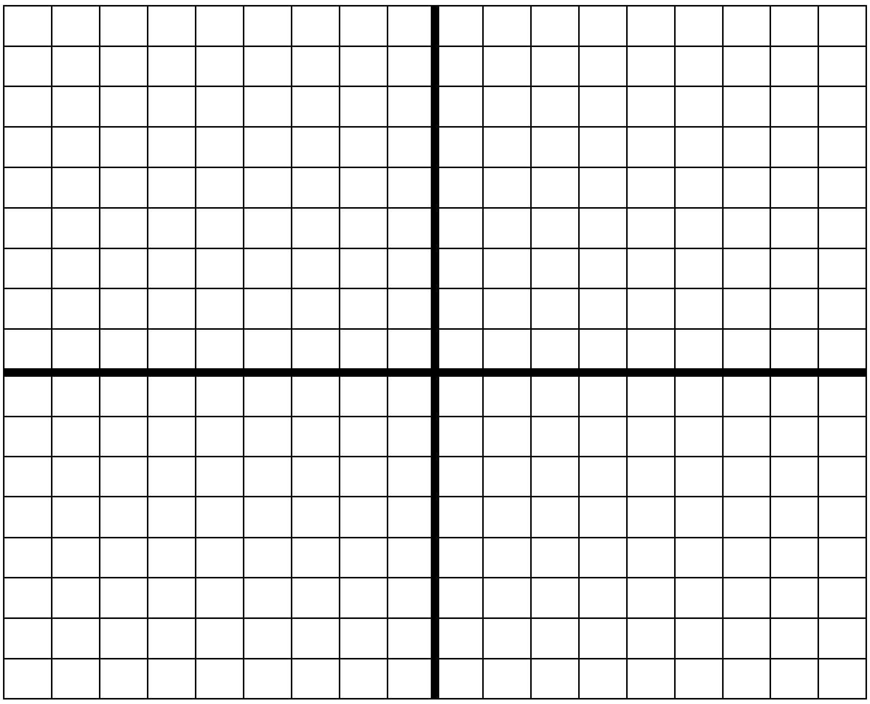
Για x = 3 έχουμε οπότε οπότε y =

Για x = -2 έχουμε οπότε οπότε y =

Για να βάλουμε όλα τα παραπάνω που βρήκαμε σε έναν πίνακα

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

<u>Αν σε ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που το καθένα έχει για συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία.</u>



Λέμε λοιπόν ότι η *εξίσωση 2x+y = 6* παριστάνει μια ευθεία ε

Γενικά

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας

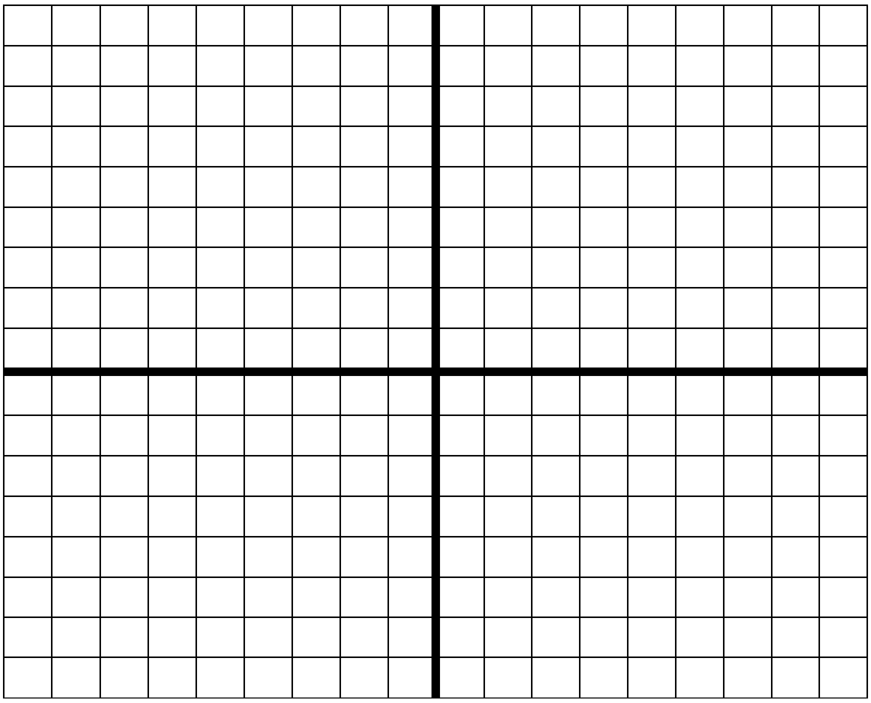
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας , τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Να σχεδιάσετε την ευθεία 2x +3y = 12
Αρκεί να βρω δύο σημεία της
(Συνήθως βρίσκω αυτά με x = 0 και y = 0)

Για x = 0 έχουμε y = ... Άρα το σημείο είναι το (,)

Για y = 0 έχουμε x = ... Άρα το σημείο είναι το (,)

Σχεδιάζω αυτά τα σημεία σε ένα σύστημα αξόνων και τα ενώνω



Ένα σημείο έχει τετμημένη x = 2 . Πόσο πρέπει να είναι η τεταγμένη του για να ανήκει στην ευθεία ;

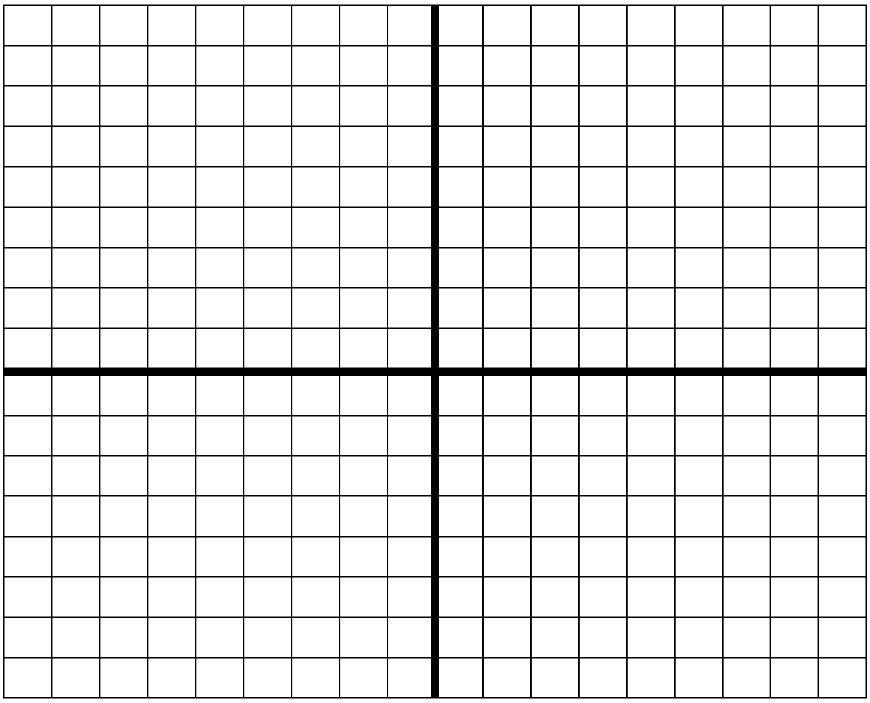
....

Το σημείο (1,2) ανήκει στην ευθεία ; ....

Το σημείο (3,2) ανήκει στην ευθεία ; ....

Εδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση y = k	Η εξίσωση x = k
Έστω η εξίσωση 0x + y = 2 Τα ζεύγη (1, 2) , (2,2) ,(-1,2) , (0,2) είναι λύσεις της Σχεδιάστε τα σημεία αυτά και την ευθεία Άρα	Έστω η εξίσωση 2x + 0y = 6 Αυτή γίνεται ………………. Τα ζεύγη (,) , (,) ,(,) , (,) είναι λύσεις της Σχεδιάστε τα σημεία αυτά και την ευθεία Άρα
Η εξίσωση y = k , παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον άξονα ……. , ενώ αν κ = 0 είναι ο άξονας…….	Η εξίσωση x = k , παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον άξονα ……. , ενώ αν κ = 0 είναι ο άξονας…….



- Η εξίσωση 0x +0y = 9 επαληθεύεται από κάποιο σημείο ;
  Μια τέτοια εξίσωση λέγεται ………………….
- Η εξίσωση 0x +0y = 0 επαληθεύεται από κάποιο σημείο ;
  Μια τέτοια εξίσωση λέγεται ………………….

Γενικά λοιπόν Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x και y λέγεται η εξίσωση αχ +βy = γ και παριστάνει ευθεία όταν α = 0 ή β= 0

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

- Αν έχουμε δυο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους , για παράδειγμα ,

  $x+3y = 4$ και $3x - 2y = 4$

  και αναζητάμε το ζευγάρι των αριθμών (x,y) που είναι **<u>συγχρόνως λύση</u>** και των δυο εξισώσεων τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα εξισώσεων με δυο αγνώστους ,** το οποίο το γράφουμε $\left\{\begin{matrix} x+3\cdot y=5 \\ 3x-2\cdot y=4 \end{matrix}\right\}$

- Παρατηρούμε ότι το ζεύγος (2,1) **<u>επαληθεύει</u>** και τις δύο εξισώσεις του γραμμικού συστήματος $\left\{\begin{matrix} x+3\cdot y=5 \\ 3x-2\cdot y=4 \end{matrix}\right\}$ αφού $\left\{\begin{matrix} 2+3\cdot 1=5 \\ 3\cdot 2-2\cdot 1=4 \end{matrix}\right\}$

  Λέμε ότι το ζεύγος (2,1) είναι **λύση του συστήματος**

- ***ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1***

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Να εξετάσετε ποιο από τα ζεύγη (2,3) και (1,-4) είναι λύση του συστήματος $\left\{\begin{matrix} 2x-y=6 \\ 3x+2\cdot y=-5 \end{matrix}\right\}$

Ένα γραμμικό σύστημα με δυο αγνώστους μπορεί να επιλυθεί **<u>αλγεβρικά ή γραφικά</u>** . Ας δούμε πρώτα την γραφική επίλυση ενός συστήματος

Δίνεται το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x+3\cdot y=5 \\ 3x-2\cdot y=4 \end{matrix}\right\}$

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

ε_1: $x+3y=5$ και ε_2: $3x-2y=4$

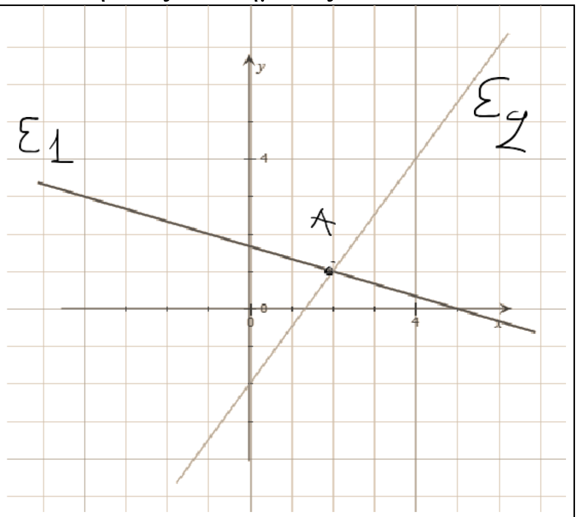
αφού πρώτα συμπληρώσουμε τα αντίστοιχα πινακάκια τιμών

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα

Οι δύο ευθείες **τέμνονται** στο σημείο Α(……,…….)

Το σημείο αυτό ανήκει και στις δύο ευθείες άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν και τις δυο εξισώσεις του συστήματος

Άρα το ζευγος (……..,…..) είναι λύση του συστήματος και επειδή οι ευθείες δεν έχουν άλλο κοινό σημείο λέμε ότι το σημείο ζεύγος (….. ,……) είναι **<u>μοναδική λύση του συστήματος</u>**



ε_1: $x+3y=5$

ε_2: $3x-2y=4$

Μοναδική λύση Α(,)

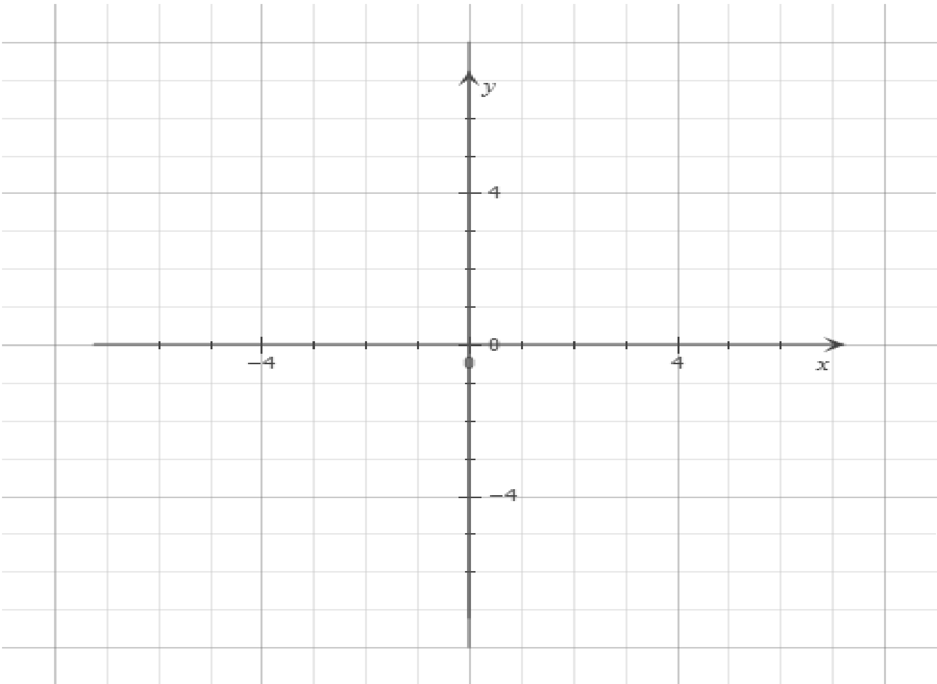
➢ ***ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2***

Δίνεται το σύστημα $\left\{ \begin{matrix} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{matrix} \right\}$

Σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες
ε_1: $x + 3y = 5$ *και* ε_2: $3x - 2y = 4$
αφού συμπληρώσετε πρώτα τα αντίστοιχα πινακάκια τιμών

ε_1: $x + y = 5$		
χ		
y		

ε_2: $2x - y = 4$		
χ		
y		



Παρατηρούμε το σχήμα και απαντάμε στα παρακάτω:

- Οι ευθείες ε_1 και ε_2 …………………………………………………………
- Το ………………………….. τους σημείο είναι το (............., ………….)
- Το σημείο (……….,.................) …..και τις δυο εξισώσεις του συστήματος
- Το ζεύγος (………., ………….) είναι …………………………… λύση του συστήματος

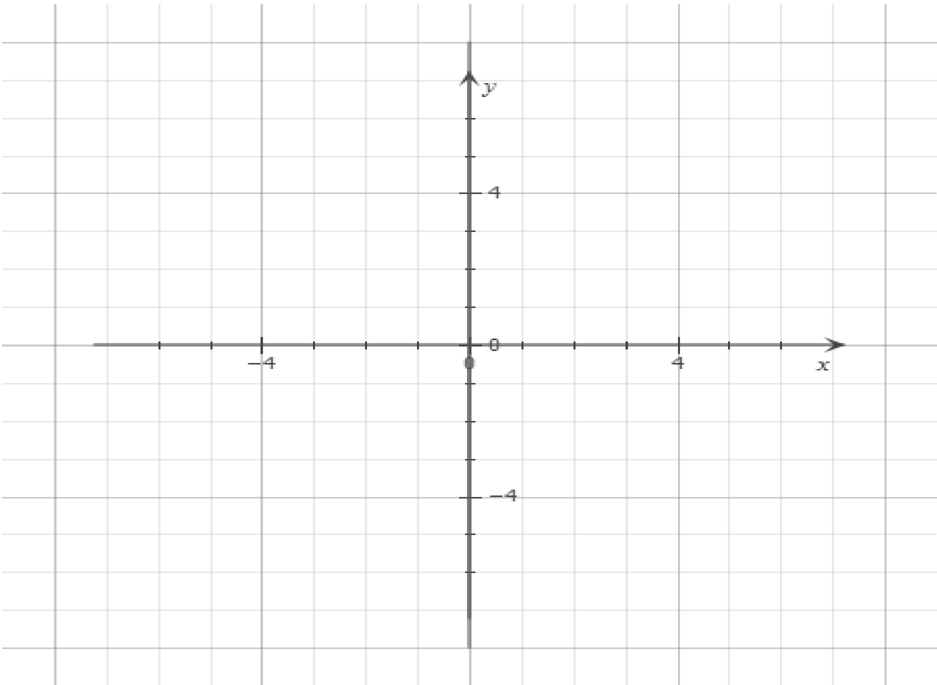
- ***ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3***

Δίνεται το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} 3x - 2y = 6 \\ 6x - 4y = -24 \end{array} \right\}$

Σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες
ε_1: $3x - 2y = 6$ *και* ε_2: $6x - 4y = -24$
αφού συμπληρώσετε πρώτα τα αντίστοιχα πινακάκια τιμών

ε_1: $3x - 2y = 6$		
χ		
y		

ε_2: $6x - 4y = -24$		
χ		
y		



Παρατηρούμε το σχήμα και απαντάμε στα παρακάτω:

- Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι …………………………………………………………
- Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν κοινό σημείο;…………………..
- Το σύστημα έχει λύση; ……………………….
- Το σύστημα αυτό λέμε ότι είναι …………………………………………..

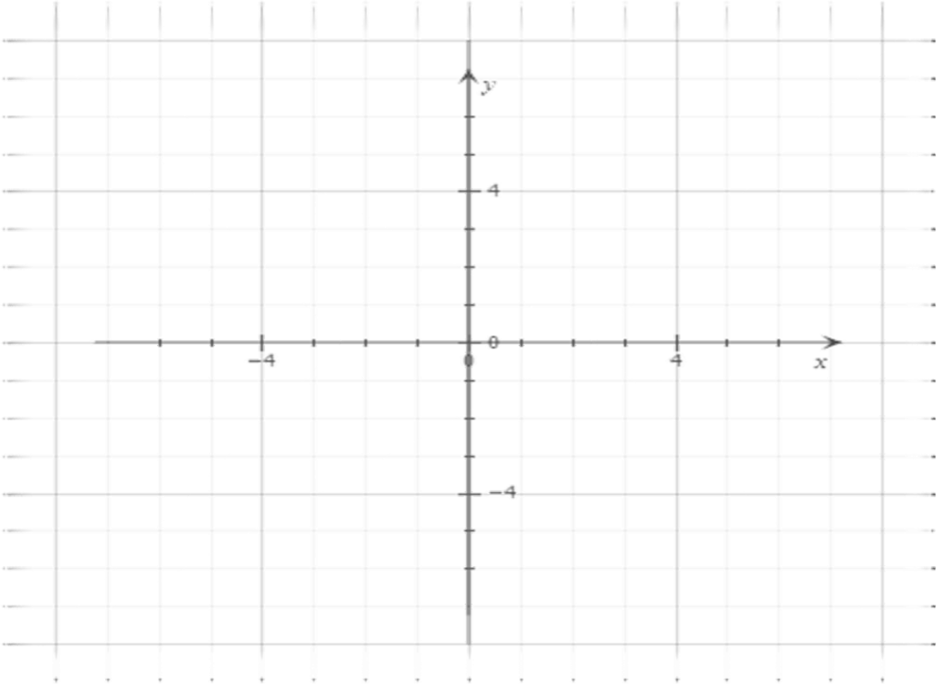
- ***ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4***

Δίνεται το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{matrix}\right\}$

Σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες
ε_1: $x+2y=4$ *και* ε_2: $2x+4y=8$
αφού συμπληρώσετε πρώτα τα αντίστοιχα πινακάκια τιμών

ε_1: $x+2y=4$		
χ		
y		

ε_2: $2x+4y=8$		
χ		
y		



Παρατηρούμε το σχήμα και απαντάμε στα παρακάτω:

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 ……………………………………………………………

- Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν κοινό σημείο;…………………..
- Το σύστημα πόσες λύσεις έχει ; ……………………….
- Το σύστημα αυτό λέμε ότι είναι ………………………………………..

α. Οι ευθείες ε1, ε2 τέμνονται.⟶	Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
β. Οι ευθείες ε1, ε2 είναι παράλληλες⟶	Το σύστημα είναι αδύνατο.
γ. Οι ευθείες ε1, ε2 συμπίπτουν. ⟶	Το σύστημα είναι αόριστο.

Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες
   ($ε_1$) : x = 2 , ($ε_2$) : y= - 3 , ($ε_3$) :4x -2y = 12 , ($ε_4$) : 2x – y = 0

2. Δίνεται η ευθεία **y = (α-1)x + 4**, η οποία διέρχεται από το σημείο Α (1,6).
   α) Να αποδείξετε ότι α = 3
   β) Να σχεδιάσετε την παραπάνω ευθεία
   γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει αυτή η ευθεία με τον άξονα xx' .
   δ) Να βρείτε το εμβαδόν πού σχηματίζει η ευθεία αυτή με τους άξονες.

3. Δίνεται η ευθεία **(ε): (λ-1)x + (λ-2) y = λ+3.**
   α) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η (ε) είναι παράλληλη στον άξονα xx'
   β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η (ε) είναι παράλληλη στον άξονα yy'
   γ) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
   δ) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η (ε) διέρχεται από το σημείο Α (1 , -3)

4. Δίνεται η ευθεία **3x – 2y = 6**
   α) Να εξετάσετε εάν το σημείο Α(1,2) ανήκει στην ευθεία
   β) Να εξετάσετε εάν το σημείο Β (2,-1) ανήκει στην ευθεία
   γ) Ένα σημείο έχει τεταγμένη - 5 ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του για να ανήκει το σημείο αυτό στην ευθεία.
   δ) Να βρεθεί το σημείο Γ στο οποίο η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα xx' .
   ε) Να βρεθεί το σημείο Δ στο οποίο η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα yy' .
   στ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΟΔ που σχηματίζει αυτή η ευθεία με τους άξονες, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
   ζ) Να υπολογίσετε την απόσταση ΓΔ και κατόπιν την απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία .

5. Να επιλυθούν **γραφικά** τα συστήματα :

$α)\ \left\{\begin{matrix} 2x+y=2 \\ 3x+2y=6 \end{matrix}\right\}$ β) $\left\{\begin{matrix} x-2y=4 \\ -3x+6y=6 \end{matrix}\right\}$ γ) $\left\{\begin{matrix} 2x-3y=6 \\ -4x+6y=-12 \end{matrix}\right\}$

Απάντηση α) (x,y) = (-2,6) , β) Αδύνατο γ) Αόριστο

6. Να επιλυθούν αλγεβρικά , με οποιαδήποτε μέθοδο , τα συστήματα :

$\alpha)\ \begin{cases} 3x+4y=6 \\ 2x-3y=-13 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 9x-3y=11 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ -4x+6y=-12 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (-2,3) , β) Αδύνατο γ) Αόριστο

7. **Να επιλυθούν αλγεβρικά τα συστήματα** :

$\alpha)\ \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+3y=13 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2x+2y=6 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (5 ,2) , β) Αδύνατο γ) Αόριστο

8. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3(x+y)-2\,(x-y)=2 \\ 4(x-y)-(x+y)=-14 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}+\frac{y-1}{2}=5 \\ \frac{2x+5}{3}-\frac{y+1}{4}=3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \frac{3x+y}{4}+\frac{x+y}{5}=-1 \\ \frac{-x+2y}{3}-\frac{x-y}{4}=3 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = ($\frac{1}{4},\frac{7}{20}$) , β) (x,y) = (5 ,7) γ) (x,y) = (-2 ,2)

9. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{4}-\frac{2y-3x}{6}=\frac{17}{6} \\ \frac{x+y}{3}+\frac{2x-y}{4}=\frac{13}{3} \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{x-1}{4}-y=1 \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=-1 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (5, 2) , β) (x,y) = (-3 ,-2)

10. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \sqrt{2}\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=2\sqrt{6} \\ \sqrt{3}\cdot x+\sqrt{2}\cdot y=5 \end{cases}$

Απάντηση (x,y) = ($\sqrt{2},\sqrt{3}$)

11. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών : ε_1: $y=2x-1$ και ε_2: $y=x+2$

Απάντηση (x,y) = (1,3)

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(-1,7).

Απάντηση y= -2x+5

13. Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η εξίσωση $x^2-(3\alpha+\beta)x+2\beta=0$ να έχει ρίζες το 1 και το 4.

Απάντηση α=1 , β=2

14. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\alpha-1)x+\beta y=\alpha+3 \\ \alpha x+(2\beta-1)y=3\beta+5 \end{cases}$ έχει λύση την $x=3$ και $y=2$, να βρείτε τα α, β

Απάντηση α=2 , β=1

15. Αν οι ευθείες **ε1 : (κ-1) x + λ y = 26** και **ε2 : (κ + 1) x – (λ+1) y = 6** τέμνονται

στο σημείο Μ (2,4), να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών κ , λ.

Απάντηση κ=9 , λ=5/2

16. Να βρείτε δυο αριθμούς που έχουν άθροισμα 100 και αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο προκύπτει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 15 .

Απάντηση 17 και 83

17. Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος (Υπόδειξη : ο διψήφιος με ψηφία χ και y είναι : $\overline{xy} = 10x + 1y$)

Απάντηση ο 64

18. Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν κότες και κουνέλια. Όλα μαζί έχουν 40 κεφάλια και 114 πόδια. Να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.

Απάντηση 17 κότες , 23 κουνέλια

19. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε.

Απάντηση έζησε 33 χρόνια , βασίλεψε 12 χρόνια

20. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές του είναι ΑΒ = 4x-2y, ΒΓ = x+y -3 και ΑΓ = 4y – 5x. Να υπολογίσετε την περίμετρό του

Απάντηση x=2 , ψ= 3 , περίμετρος: 6

21. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3} \\ \frac{x+y}{x+y-4} = 5 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (1,1) , β) (x,y) = (4,3) ή (3,4) γ) (x,y) = (4,1)

22. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=-9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+y=17 \\ y-x=5 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (3,-1) ή (-1,3) , β) (x,y) = (-4,5) γ) (x,y) = (-4,1) ή (-1,4)

23. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+2y=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2+3x=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2-3x=-2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (1,1) ή (-3,3) , β) (x,y) = (0,3) ή (3,0) γ) (x,y) = (2,3) ή (1,1)

24. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} (x+2y-6)(x+y-2)=0 \\ 3x+y=8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (x-2)(y-4)=0 \\ 3x+y=12 \end{cases}$

Απάντηση $\alpha)$ $(x=3, y=-1)$ ή $(x=2, y=2)$ β) $(x=2, y=6)$ ή $(x=\frac{8}{3}, y=4)$

25. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=7 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=19 \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=7 \\ 6x^2-5y^2=1 \end{cases}$

Απάντηση α) (x,y) = (1,1), β) (x,y) = (1/5 ,1/3)
γ)$(\boldsymbol{x=-1, y=-1})$ ή $(\boldsymbol{x=-1, y=1})$ ή $(\boldsymbol{x=1, y=-1})$ ή $(\boldsymbol{x=1, y=1})$

26. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \frac{\alpha+1}{2}-\frac{\beta+2\alpha+2}{4}=\frac{2-\alpha}{5} \\ \frac{\alpha-1}{3}=\frac{3\alpha+2\beta}{5}-\frac{11+\alpha}{15} \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} 4a-5\beta=8 \\ -3a-6\beta=-6 \end{cases}.$$

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ) Αν α και β είναι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος να λύσετε την εξίσωση:

$$ax^2-(\beta+5)x+a+1=0$$

27. A= $x(x+2)-(x+1)(x-1)-2(x-2)$,

B = $(2x-3)^2-(4x^2-12x+10)$

α) Να αποδείξετε ότι Α =5 και ότι Β = -1

β) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=A \\ x+3y=B \end{cases}$

28.
Να επιλύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

α) $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x+y=6 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$, δ) $\begin{cases} -x+y=0 \\ x-5y=4 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} 10x+9y=\frac{11}{3} \\ -9x+3y=-7 \end{cases}$, ζ) $\begin{cases} 4x-16y=-19 \\ 2x+8y=\frac{21}{2} \end{cases}$, η) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{12}=54 \end{cases}$

θ) $\begin{cases} \frac{x}{9}+y=-\frac{23}{54} \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=0 \end{cases}$, ι) $\begin{cases} 6-\frac{y-x}{5}=\frac{x+y}{3} \\ \frac{x}{2}-\frac{x-y}{5}=\frac{7}{2} \end{cases}$, ια) $\begin{cases} x+3y-\frac{x-1}{2}=1 \\ x-\frac{x-3+y}{2}=\frac{1}{2}y \end{cases}$

ιβ) $\begin{cases} \frac{3x+2}{4}+\frac{2y+3}{5}=\frac{11}{10} \\ \frac{3(x+1)+2(y+3)}{2}+\frac{x}{3}+\frac{y-2}{4}=4 \end{cases}$, ιγ) $\begin{cases} \frac{4}{15}-\frac{5y-3x}{3}=2(x-y) \\ 2x+y-\frac{4}{5}=\frac{2x+y}{13} \end{cases}$

29. Να επιλύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

α) $\begin{cases} 2y-\frac{x-5}{3}=\frac{7}{2}(y-1) \\ \frac{y-3}{5}-\frac{2-5x}{2}=2x \end{cases}$, β) $\begin{cases} \frac{3x+2y}{2}-\frac{5x-6y}{3}=x+2y \\ \frac{4(x-2y)}{9}+\frac{3y-2x}{6}=3x-4y \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 15-\frac{4}{5}(x+y)=\frac{2y-x}{2} \\ \frac{x+y}{12}-\frac{y-x}{2}=\frac{7}{4} \end{cases}$, δ) $\begin{cases} \frac{1}{3}\left(x-2-\frac{3y}{4}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{y}{2}-\frac{1+x}{4}\right)=-1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{2y-3}{3}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{2x+2}{3}-y\right) \end{cases}$

ε) $\begin{cases} \frac{3(x-1)(1+x)-2y}{18}+\frac{2x-(1+y)(1-y)}{3}-\frac{xy}{2}=\frac{(3x-4y)^2-x^2}{48}-\frac{4}{3} \\ \frac{(x-8)^2}{20}-\frac{9x-y}{45}-\frac{13}{3}=\frac{3x(x-2)-8y}{60} \end{cases}$

στ) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{xy} \\ \frac{2}{y}+5=3 \end{cases}$, ζ) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{9}{2xy} \\ x+2y=3 \end{cases}$, η) $\begin{cases} \frac{2(4+x)}{x+1}+1=\frac{6y-1}{2y-3} \\ \frac{x+2}{1-x}-\frac{1+4y}{2(2-y)}=1 \end{cases}$,

θ) $\begin{cases} \frac{5}{x-y}-\frac{2}{x-2}=\frac{3(y+3)}{(2-x)(x-y)} \\ \frac{4}{1-y}+\frac{5}{x+y}-\frac{2(x+3)}{(1-y)(x+y)}=0 \end{cases}$, ι) $\begin{cases} \frac{x}{x+1}-\frac{5}{(x+1)(1-y)}=\frac{y}{y-1} \\ \frac{3x^2-1+2y^2}{xy}-\frac{2y-1}{x}=\frac{1+3x}{y} \end{cases}$

ΚΑΠΟΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΛΥΜΕΝΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 4 ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 140

Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y όταν
α) $(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$ **β)** $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$

α)

$(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$ άρα $x + y - 2 = 0$
και $2x - 3y + 1 = 0$
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 1$ και $y = 1$

Θυμόμαστε ότι¨:
Άν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε
$\alpha = \beta = 0$

β)
$2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$ άρα $x^2 + x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$
$(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + y^2 - 2xy) = 0$
$(x + 2)^2 + (x - y)^2 = 0$
$x + 2 = 0$ και $x - y = 0$
$x = -2$ και $x = y$
$x = -2$ και $y = -2$

ΑΣΚΗΣΗ 7 ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 140

Αν η εξίσωση $(2\lambda - \kappa - 3)x = \kappa - \lambda + 1$ είναι αόριστη να βρείτε τους αριθμούς κ και λ

Αφού η εξίσωση είναι αόριστη, ισχύει $2\lambda - \kappa - 3 = 0$ **(1)**
και $\kappa - \lambda + 1 = 0$ **(2)**
Η (2) δίνει $\kappa = \lambda - 1$ **(3)**
Τότε η (1) γίνεται $2\lambda - \lambda + 1 - 3 = 0$ άρα $\lambda = 2$
Η (3) δίνει $\kappa = 2 - 1 = 1$

Θυμόμαστε ότι η εξίσωση
$0 \bullet x = 0$
Είναι αόριστη

ΑΣΚΗΣΗ 13 ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 141

Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος κατά 5 m το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως αυξήσουμε το μήκος κατά 4m και ελαττώσουμε το πλάτος κατά 6m το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2.
Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ;

Έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθογωνίου.
Τότε το εμβαδόν του είναι $E = xy$
Μετά την πρώτη μεταβολή οι διαστάσεις γίνονται $x - 2$, $y + 5$
το δε εμβαδόν $E_1 = (x - 2)(y + 5)$, για το οποίο ισχύει ότι
$E_1 = E + 94$ δηλαδή $(x - 2)(y + 5) = xy + 94$
$xy + 5x - 2y - 10 = xy + 94$
$5x - 2y = 104$ **(1)**
Με τη δεύτερη μεταβολή οι διαστάσεις γίνονται $x + 4$, $y - 6$
το δε εμβαδόν $E_2 = (x + 4)(y - 6)$ για το οποίο ισχύει
$E_2 = E - 104$ δηλαδή $(x + 4)(y - 6) = xy - 104$
$xy - 6x + 4y - 24 = xy - 104$
$-6x + 4y = -80$
$-3x + 2y = -40$ **(2)**
Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε $2x = 64$ άρα $x = 32$ m
Και λόγω της (1) $y = 28$ m

ΑΣΚΗΣΗ 7 ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 140

Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος

Έστω xy ο ζητούμενος αριθμός με πλήθος μονάδων 10x + y

$35=3\cdot 10+5\cdot 1$
$89 = 3\cdot 10+5\cdot 1$
$xy= x\cdot 10+y\cdot 1$

Τότε x + y = 10 **(1)**

Εναλλάσσοντας τα ψηφία του αριθμού αυτός γίνεται yx με πλήθος μονάδων 10y + x ο οποίος είναι κατά 18 μονάδες μικρότερος από τον 10x + y .

Οπότε 10x + y − 18 = 10y + x άρα 9x − 9y = 18 άρα x − y = 2 **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε x = 6 και y = 4

Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 64

ΑΣΚΗΣΗ 5 α ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 140

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}(2x - 3y + 4)(x + y) = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$

$$\begin{cases}(2x - 3y + 4)(x + y) = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$$

άρα $\begin{cases}2x - 3y + 4 = 0 \text{ ή } x + y = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$

Θυμόμαστε
Αν α•β=0 τότε α= 0 ή β=0

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με δυο συστήματα

$\begin{cases}2x - 3y + 4 = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$ ή $\begin{cases}x + y = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$ και λύνουμε το κάθε ένα ξεχωριστά

- $\begin{cases}2x - 3y + 4 = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}2x - 3y = -4\\ -2x - y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}-4y = -8\\ -2x - y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}y = 2\\ x = 1\end{cases}$
- $\begin{cases}x + y = 0\\ 2x + y = 4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}x + y = 0\\ -2x - y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}-x = -4\\ -2x - y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}x = 4\\ y = -4\end{cases}$

Επομένως οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι η (x = 1 και y = 2)
και η (x = 4 και y = −4)

ΑΣΚΗΣΗ 5 β ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 140

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}(3x - 4y)(x + 2y) = 8\\ \frac{x}{2} + y = -2\end{cases}$

$\begin{cases}(3x - 4y)(x + 2y) = 8\\ \frac{x}{2} + y = -2\end{cases}$ άρα με απαλοιφή $\begin{cases}(3x - 4y)(x + 2y) = 8\\ x + 2y = -4\end{cases}$

Αντικαθιστώ το x+2y της 1ης εξίσωσης με -4, όπως μας λέει η 2η

$\begin{cases}(3x - 4y)(-4) = 8\\ x + 2y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}3x - 4y = -2\\ x + 2y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}3x - 4y = -2\\ 2x + 4y = -8\end{cases}$

Άρα $\begin{cases}5x = -10\\ x + 2y = -4\end{cases}$ άρα $\begin{cases}x = -2\\ y = -1\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 5 γ ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΛ 140

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$

άρα $\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Θυμόμαστε ότι
Αν $\alpha^2 = 0$ τότε α=0
άρα αφού $(x-y)^2=0$
τότε x-y=0

άρα $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} 2x = 7 \\ x + y = 7 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$

Αυτή η άσκηση λύνεται και με αντικατάσταση :

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x^2 + (7-x)^2 - 2x(7-x) = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + 49 - 14x + x^2 - 14x + 2x^2 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$ άρα $\begin{cases} 4x^2 - 28x + 49 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$ άρα

$\begin{cases} (2x-7)^2 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$ άρα $\begin{cases} 2x - 7 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$ άρα $\begin{cases} \chi = \frac{7}{2} \\ y = 7 - x \end{cases}$ άρα $\chi = \frac{7}{2}, y = \frac{7}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΚΑΤΑΛΗΓΕΙ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ

Να λύσετε το σύστημα $\left\{ \begin{matrix} x + 2y = 4 \\ x^2 + xy = 6 \end{matrix} \right\}$ (Σ)

Καταρχήν ονομάζουμε τις δυο εξισώσεις $\chi + 2y = 3$ (1) , $x^2 + xy = 6$ (2)

Λύνουμε την (1) ως προς χ και έχουμε

$\boxed{x = 4 - 2y}$ (3)

και αντικαθιστούμε στην (2) , η οποία γίνεται

$(4-2y)^2 + (4-2y)y = 6$ άρα

$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2y + (2y)^2 + 4y - 2y^2 = 6$ άρα

$16 - 16y + 4y^2 + 4y - 2y^2 - 6 = 0$ *άρα*

$\boxed{\mathbf{2y^2 - 12y + 10 = 0}}$ ***(4)***

Αυτή είναι μια εξίσωση β βαθμού και την λύνουμε με την χρήση διακρίνοιυσας

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 144 - 80 = 64$$

Άρα αφού Δ> 0 η (4) έχει 2 λύσεις τις

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm 8}{4} = \begin{cases} y = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Για y = 5 η (3) δίνει $x = 4 - 2 \cdot 5$ άρα $\chi = -6$

Για y = 1 η (3) δίνει $x = 4 - 2 \cdot 1$ άρα $\chi = 2$

Τελικά το σύστημα έχει 2 λύσεις . Τις (-6,5) και (2,1)