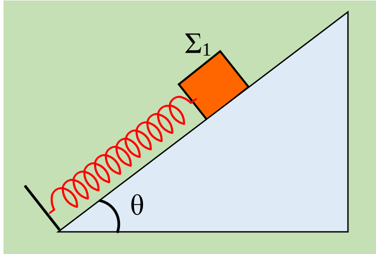
Δυο ταλαντώσεις σε κεκλιμένο επίπεδο



Ένα σώμα Σ_1, μάζας m_1=1kg ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, δεμένο στο πάνω άκρο ιδανικού ελατηρίου, όπως στο σχήμα, έχοντας συσπειρώσει το ελατήριο κατά 0,1m. Μετακινούμε το σώμα φέρνοντάς το σε μια θέση του επιπέδου, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό μήκος του και τη στιγμή t_0=0, το αφήνουμε να κινηθεί.

i) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα εκτελέσει ΑΑΤ.

ii) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο (x=f(t)) και να κάνετε την γραφική της παράσταση μέχρι τη στιγμή t_1=1s, θεωρώντας θετική την αρχική απομάκρυνση.

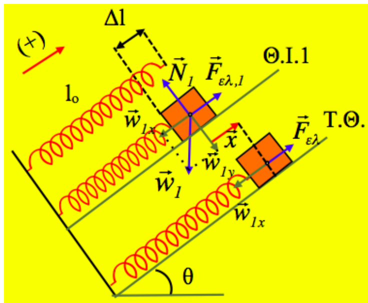
Τη στιγμή t_1=1s, τοποθετούμε πάνω στο σώμα Σ_1 ένα άλλο σώμα Σ_2, χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε ακολουθεί μια νέα ταλάντωση, όπου τα δυο σώματα κινούνται μαζί, σαν ένα σώμα Σ. Τα σώματα επιστρέφουν στη θέση που ήταν τη στιγμή t_1, για πρώτη φορά, τη στιγμή t_2=3s.

iii) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ_2, καθώς και η ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων.

iv) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη δύναμη στατικής τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωμάτων και τους επιτρέπει να κινούνται μαζί.

Δίνεται για την γωνία του κεκλιμένου επιπέδου ότι ημθ=0,4, g=10m/s^2, ενώ $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.1.) όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά Δl=0,1m. Από την ισορροπία του σώματος στην διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,1} - w_x = 0 \rightarrow k\Delta l = m_1 g \eta\mu\theta \rightarrow \quad (1)$$

$$k = \frac{m_1 g \eta\mu\theta}{\Delta l} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,4}{0,1} N/m = 40 N/m$$

Παίρνοντας εξάλλου το σώμα σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας, θα έχουμε:

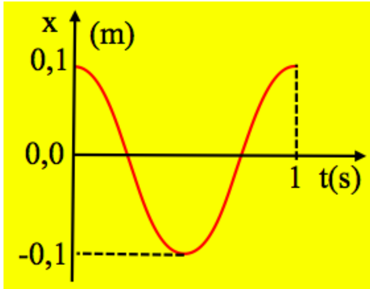
$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda} - w_x = k(\Delta l - x) - m_1 g \eta\mu\theta \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -kx$$

Συνεπώς το σώμα Σ_1 εκτελεί ααт, γύρω από την θέση ισορροπίας (Θ.Ι.1), όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

ii) Αν το σώμα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αυτή είναι και η θέση πλάτους, συνεπώς A_1=Δl=0,2m. Εξάλλου η περίοδος ταλάντωσής του θα είναι ίση:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40}}s = 1s$$

Λαμβάνοντας τέλος υπόψη ότι για t=0 το σώμα βρίσκεται στην θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του, συμπεραίνουμε ότι η αρχική φάση της απομάκρυνσης είναι ίση με π/2, οπότε τελικά θα έχουμε:



$$x = A\eta\mu(\omega_1 t + \varphi_o) = 0,1\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, μέχρι τη στιγμή t_1=T=1s, θα έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.

iii) Το σώμα Σ_2 τοποθετείται πάνω στο Σ_1, όταν αυτό βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπου και είναι και θέση πλάτους, της πρώτης ταλάντωσης του Σ_1. Το σώμα Σ ($\Sigma_1+\Sigma_2$) ξεκινά και αυτό από την ίδια θέση την νέα ταλάντωση, γύρω από μια άλλη θέση ισορροπίας, στην οποία το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά d, όπου δουλεύοντας όπως στο i) ερώτημα, η σχέση (1) γίνεται:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,2} - w_{o\lambda,x} = 0 \rightarrow kd = (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta \quad (2)$$

Εάν το σώμα Σ επιστρέφει στην θέση φυσικού μήκους (η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης) τη στιγμή t_2=3s, σημαίνει ότι η νέα περίοδος ταλάντωσης είναι T_2=2s, οπότε:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{kT_2^2}{4\pi^2} = \frac{40\cdot 2^2}{4\cdot 10}kg = 4kg \rightarrow m_2 = 4kg - 1kg = 3kg$$

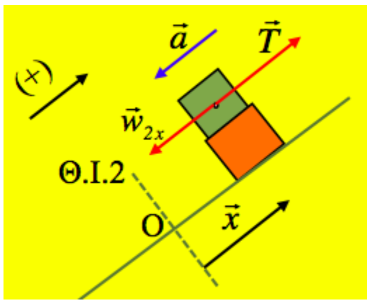
Αλλά τότε από την (2) παίρνουμε:

$$d = A_2 = \frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\theta}{k} = \frac{4\cdot 10\cdot 0,4}{40}m = 0,4m$$

Και η ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση:

$$E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}40\cdot 0,4^2 J = 3,2J$$

iv) Έστω κάποια στιγμή το σώμα Σ ($\Sigma_1+\Sigma_2$) περνά από μια θέση με απομάκρυνση x, όπως στο σχήμα, έχοντας επιτάχυνση:



$$a = -\omega_2^2 x$$

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα κατά την διεύθυνση x, για το σώμα Σ_2 (το οποίο έχει την ίδια προφανώς επιτάχυνση), παίρνουμε:

$$T - w_{2x} = m_2 a$$

όπου Τ η στατική τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_2. Τότε:

$$T = m_2 g\eta\mu\theta + m_2(-\omega_2^2 x) = m_2 g\eta\mu\theta - m_2\omega_2^2 x$$

Αλλά τότε η μέγιστη στατική τριβή ασκείται στο σώμα για x=-A_2, οπότε:

$$T_{max} = m_2 g\eta\mu\theta + m_2\omega_2^2 A_2 = m_2\left(g\eta\mu\theta + \frac{4\pi^2}{T_2^2}A_2\right) = 3\left(10\cdot 0,4 + \frac{4\pi^2}{2^2}0,4\right)N = 24N$$

Ενώ η ελάχιστη για x=+A_2:

$$T_{min} = m_2 g\eta\mu\theta - m_2\omega_2^2 A_2 = m_2\left(g\eta\mu\theta - \frac{4\pi^2}{T_2^2}A_2\right) = 3\left(10\cdot 0,4 - \frac{4\pi^2}{2^2}0,4\right)N = 0$$

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην αρχική θέση (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) το σώμα $Σ_2$ επιταχύνεται εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους, η οποία «παίζει τον ρόλο» της δύναμης επαναφοράς. Το ίδιο συμβαίνει και για το σώμα $Σ_1$, στην πρώτη ταλάντωση (αλλά και στην $2^η$...).

dmargaris@gmail.com