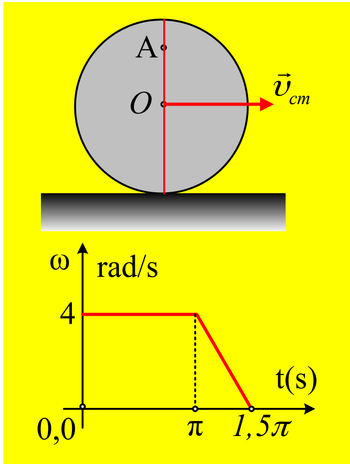
κύλιση τροχού

Ένας τροχός κέντρου Ο και ακτίνας R=0,5m κυλίεται προς τα δεξιά σε οριζόντιο δρόμο, όπως στο σχήμα και σε μια στιγμή t=0, ένα σημείο του Α βρίσκεται πάνω σε μια κατακόρυφη διάμετρό του, απέχοντας 0,8m, από το έδαφος. Στο διάγραμμα του σχήματος, δίνεται η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Να σημειώστε στο σχήμα την γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη στιγμή t_0=0 και την ταχύτητα του σημείου Α. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας αυτής.

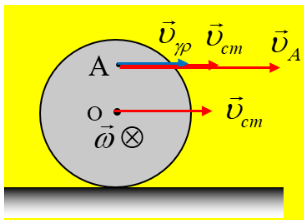
ii) Να υπολογίστε τον αριθμό των περιστροφών του τροχού, μέχρι τη στιγμή που αρχίζει να μειώνεται η γωνιακή του ταχύτητα.

iii) Να υπολογιστούν η γωνιακή επιτάχυνση, καθώς και η επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού, στο χρονικό διάστημα που ο τροχός επιβραδύνεται.

iv) Ποιο το μέτρο της συνολικής μετατόπισης του σημείου Α, μέχρι τη στιγμή που ο τροχός σταματά.

Απάντηση:

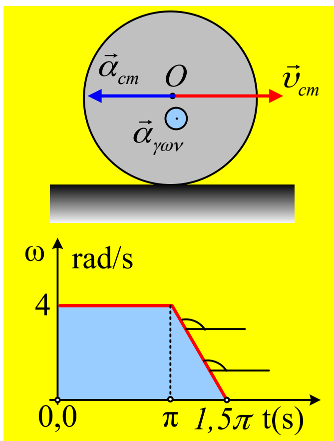
i) Αφού ο τροχός κυλίεται προς τα δεξιά, στρέφεται δεξιόστροφα, οπότε η γωνιακή του ταχύτητα είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα όπως στο σχήμα. Θεωρώντας εξάλλου την κίνηση ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από το κέντρο Ο, το σημείο Α έχει τις ταχύτητες του σχήματος, όπου $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot(AO)$ με (ΑΟ)=r=0,3m συνεπώς έχει ταχύτητα υ_A παράλληλη με το έδαφος, μέτρου:



$$\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}+\omega r=\omega R+\omega r=\omega(R+r)\rightarrow$$
$$\upsilon_A=4(0,5+0,3)m/s=3,2m/s$$

ii) Η γωνιακή ταχύτητα αρχίζει να μειώνεται τη στιγμή t_1=π (s), οπότε μέχρι τη στιγμή αυτή στρέφεται κατά γωνία $\theta_1=\omega t_1=4\pi\ rad$, γωνία που αντιστοιχεί σε δυο περιστροφές του τροχού.

iii) Στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης, η κλίση στο διάγραμμα ω-t η κλίση παραμένει σταθερή, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση, παραμένει σταθερή. Η αλγεβρική τιμή της οποίας είναι ίση:



$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{0-4}{1,5\pi - \pi} \, rad/s^2 = -\frac{8}{\pi} \, rad/s^2$$

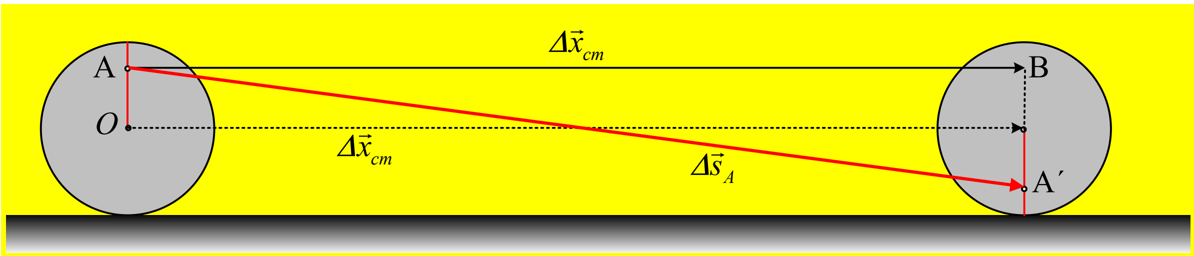
Η αρνητική τιμή της παραπάνω αλγεβρικής τιμής, σημαίνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση, έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας (την οποία δεχτήκαμε ως θετική), όπως στο σχήμα. Αλλά τότε και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα του κ.μ. όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$|\alpha_{cm}| = |a_{\gamma\omega\nu}| R = \frac{8}{\pi} \cdot 0,5 \, m/s^2 = \frac{4}{\pi} \, m/s^2$$

iv) Η ολική γωνιακή μετατόπιση του τροχού (η γωνία περιστροφής του) είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του γαλάζιου τραπεζίου στο διάγραμμα ω-t:

$$\theta = \frac{B+\beta}{2}\upsilon = \frac{1,5\pi + \pi}{2} \cdot 4rad = 5rad = (4\pi + \pi)rad$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η ακτίνα που περνά από το σημείο Α έχει κάνει δυο περιστροφές και επιπλέον έχει στραφεί κατά γωνία π rad, οπότε το σημείο (ας το ονομάσουμε Α΄) βρίσκεται στην θέση του παρακάτω σχήματος, όταν σταματήσει η κύλιση.



Εξάλλου το κέντρο του τροχού Ο, έχει μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x_{cm} = \theta \cdot R = 5\pi \cdot 0,5m = 2,5\pi \ m = 7,85m$$

Στο σχήμα έχει σχεδιασθεί το διάνυσμα της μετατόπισης $\Delta\vec{s}_A$ του σημείου Α. Για το μέτρο της μετατόπισης αυτής, με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΑ΄ θα έχουμε:

$$\Delta s = \sqrt{(AB)^2 + (BA')^2} = \sqrt{(\Delta x_{cm})^2 + (2r)^2} \rightarrow$$

$$\Delta s = \sqrt{7,85^2 + 0,6^2} m = 7,87m$$

dmargaris@gmail.com