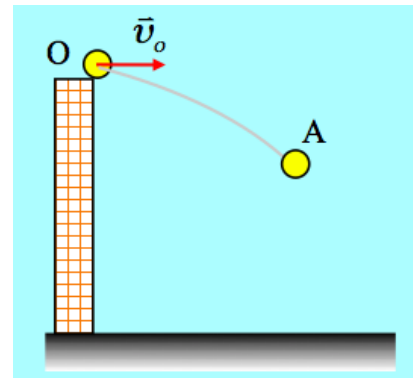


Η ορμή και η μεταβολή της ορμής

Μια μπάλα μάζας 0,4kg εκτοξεύεται τη στιγμή $t_0=0$ από ορισμένο ύψος, από ένα σημείο O με αρχική ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$, οριζόντια.

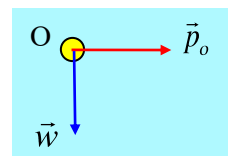


- i) Να βρείτε την ορμή και το ρυθμό μεταβολής της ορμής της μπάλας, αμέσως μετά την εκτόξευση.
- ii) Αν τη στιγμή $t_1=1\text{s}$ η μπάλα φτάνει σε μια θέση A, να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στην θέση B.
- iii) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής της μπάλας μεταξύ των θέσεων O και A.
- iv) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μπάλας στις θέσεις O και A.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ορμής και του βάρους, στη θέση O, αμέσως μετά την εκτόξευση, όπου η ορμή είναι οριζόντια, ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα, ενώ το βάρος είναι κατακόρυφη δύναμη. Για την ορμή έχουμε:



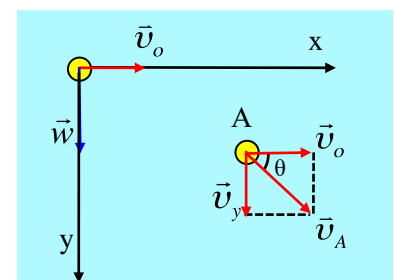
$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 \rightarrow p_0 = mv_0 = 0,4 \cdot 10\text{kgm/s} = 4\text{kgm/s}$$

Ενώ από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{w} \rightarrow \frac{dp}{dt} = w = mg = 0,4 \cdot 10 \text{kgm/s}^2 = 4 \text{kgm/s}^2$$

με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω, όπως το βάρος.

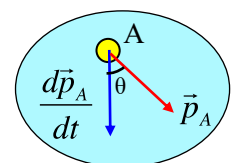
- ii) Θεωρώντας την οριζόντια βολή της μπάλας ως μια σύνθετη κίνηση, στην οριζόντια διεύθυνση εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ενώ στην κατακόρυφη, ελεύθερη πτώση. Έτσι στην θέση A θα έχει δύο συνιστώσες ταχύτητας, όπως στο σχήμα, όπου $v_x=v_0$ και $v_y=gt=10\text{m/s}$. Αλλά τότε η ταχύτητα της μπάλας στη θέση αυτή θα έχει μέτρο:



$$v_A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} \text{m/s} = 10\sqrt{2} \text{m/s}$$

και διεύθυνση που θα σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$, τόσο με την οριζόντια διεύθυνση, όσο και με την οριζόντια (η διαγώνιος τετραγώνου είναι και διχοτόμος της ορθής γωνίας).

Την κατεύθυνση της ταχύτητας στη θέση A, έχει και η ορμή της μπάλας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, με μέτρο:



$$p_A = mv_A = 0,4 \times 10\sqrt{2} \text{kgm/s} = 4\sqrt{2} \text{kgm/s}$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής παραμένει σταθερός, με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα

κάτω, αφού είναι ίσος με το βάρος της μπάλας.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{w} \rightarrow \frac{dp}{dt} = w = 4 \text{ kgm/s}^2$$

iii) Για την μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Ο και Α έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_A - \vec{p}_O = \vec{p}_A + (-\vec{p}_O)$$

Μπορείτε να συνεχίσετε την επεξεργασία;

Ο δρόμος δύσβατος, οπότε ας αλλάξουμε πορεία και ας δουλέψουμε με άξονες, οπότε η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$Dp_x = p_{Ax} - p_{Ox} = mU_o - mU_o = 0 \text{ και}$$

$$\Delta p_y = p_{Ay} - p_{Oy} = mv_y - 0 = 0,4 \cdot 10 \text{ kgm/s} = 4 \text{ kgm/s}$$

Η μεταβολή της ορμής της μπάλας μεταξύ των θέσεων Ο και Α, είναι κατακόρυφη, με φορά προς τα κάτω και μέτρο $\Delta p = 4 \text{ kgm/s}$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{w} \rightarrow \frac{dp}{dt} = w \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg \rightarrow \\ \Delta p = mg \Delta t = 0,4 \cdot 10 \cdot 1 \text{ kgm/s} = 4 \text{ kgm/s} \end{aligned}$$

αφού το βάρος είναι σταθερή δύναμη, οπότε και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής παραμένει σταθερός και η στιγμιαία τιμή του συμπίπτει με την μέση τιμή στο χρονικό διάστημα του 1s.

iv) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\begin{aligned} DK = W_{ol} \rightarrow \frac{DK}{Dt} = \frac{DW}{Dt} \xrightarrow{\text{στιγμιαία}} \\ \frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{|SF| \cdot |ds| \cdot \cos \alpha}{dt} = |SF| \cdot |v| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Έτσι στην περίπτωση μας, όπου $\Sigma F = w = 4 \text{ N}$, θα έχουμε:

$$\text{Για την θέση Ο: } \frac{dK}{dt} = |w| \cdot |v| \cdot \cos \alpha = w \cdot v_o \cdot 0 = 0$$

$$\text{Για την θέση Α: } \frac{dK}{dt} = |w| \cdot |v| \cdot \cos \alpha = w \cdot v_A \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot 10 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ J/s} = 40 \text{ J/s}$$

Στη θέση Ο, το βάρος είναι κάθετο στην ταχύτητα και δεν παράγει έργο. Άρα και η ισχύς της δύναμης είναι μηδενική.

dmargaris@gmail.com