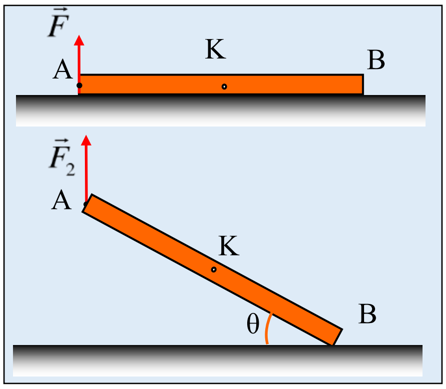
Τρεις ισορροπίες μιας δοκού



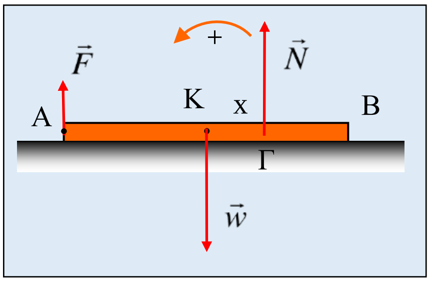
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 4m και βάρους 400Ν. Σε μια στιγμή στο άκρο Α τη δοκού, ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω, μέτρου F=80Ν και παρατηρούμε ότι η σανίδα συνεχίζει να ηρεμεί.

i) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το επίπεδο στη δοκό, καθώς και η ροπή της ως προς το κέντρο μάζας Κ της δοκού.

ii) Ποια η μέγιστη τιμή F_1 που μπορεί να πάρει το μέτρο της δύναμης αυτής, χωρίς να πάψει η δοκός να ισορροπεί;

iii) Μεταβάλλοντας το μέτρο της κατακόρυφης αυτής δύναμης, ανασηκώνουμε τη δοκό, φέρνοντάς την να ισορροπεί σε μια νέα θέση, όπου σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ, όπως στο κάτω σχήμα. Να υπολογίστε το μέτρο της δύναμης F_2, σε συνάρτηση με την γωνία θ.

Απάντηση:



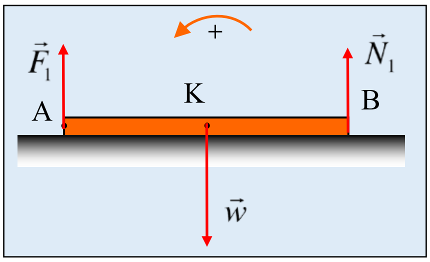
i) Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου είναι προφανώς κατακόρυφη, ενώ από την συνθήκη Στ=0, για κάθε σημείο, άρα και για το μέσον Κ της δοκού, συμπεραίνουμε ότι η κάθετη αντίδραση του επιπέδου δεν ασκείται στο μέσον της δοκού, αλλά σε κάποιο σημείο Γ, δεξιά του Κ, σε απόσταση x, όπως στο σχήμα. Έτσι από την ισορροπία της δοκού παίρνουμε:

$$SF = 0 \to F + N - w = 0 \to N = mg - F = 400N - 80N = 320N \text{ και}$$

$$St_K = 0 \to N \cdot x + w \cdot 0 - F \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \quad (1) \xrightarrow{antikat\acute{a}stash}$$

$$320x = 80 \cdot 2 \to x = 0{,}5m \text{ ή}$$

$$\tau_{K,N} = 320x = 160Nm$$

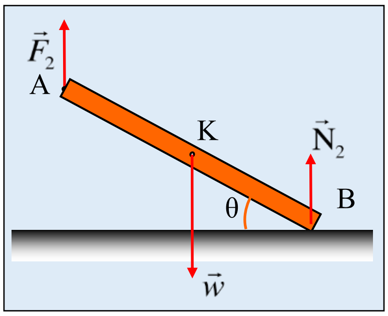


ii) Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, τόσο αυξάνεται η απόσταση x του φορέα της Ν από το κέντρο μάζας Κ. Αλλά τότε αυξάνοντας συνεχώς το μέτρο της F, κάποια στιγμή η Ν θα φτάσει στο άκρο Β της δοκού, πράγμα που σημαίνει πρακτικά ότι η δοκός έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, μόνο με το άκρο της Β και είναι έτοιμη να αρχίσει να περιστρέφεται. Ξανά από την ισορροπία της παίρνουμε:

$$St_K = 0 \to N_1 \times \frac{\ell}{2} + w \times 0 - F_1 \times \frac{\ell}{2} = 0 \to N_1 = F_1 \quad (2)$$

$$SF = 0 \rightarrow N_1 + F_1 = w \xrightarrow{(2)} 2F_1 = w \rightarrow F_1 = \frac{1}{2} w = 200N$$

iii) Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό για μια τυχαία γωνία θ, που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο. Από την ισορροπία της δοκού στην θέση αυτή, θα έχουμε για τις ασκούμενες ροπές:



$$St_K = 0 \rightarrow N_2 \times \frac{\ell}{2} sunq + w \times 0 - F_2 \times \frac{\ell}{2} sunq = 0 \rightarrow N_2 = F_2 \quad (3)$$

Ενώ αντίστοιχα από την ισορροπία των δυνάμεων θα έχουμε:

$$SF = 0 \rightarrow N_2 + F_2 = w \xrightarrow{(3)} 2F_2 = w \rightarrow F_2 = \frac{1}{2} w = 200N$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η δύναμη που απαιτείται για να ισορροπεί η δοκός, είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ. Το δε μέτρο της είναι το ίδιο και για $θ=0^o$, όπως υπολογίστηκε στο 2^o ερώτημα.

dmargaris@gmail.com