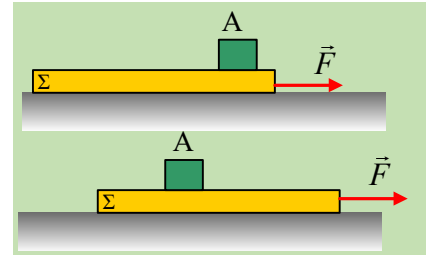


Η κίνηση ενός συστήματος και η ορμή

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μάζας $M=3\text{kg}$, πάνω στην οποία ηρεμεί ένα σώμα A μάζας $m=2\text{kg}$. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στη σανίδα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη \vec{F} , μέτρου $F=6\text{N}$, όπως στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι το σώμα A αρχίζει να γλιστράει πάνω στη σανίδα, ενώ κινείται και αυτό προς τα δεξιά.

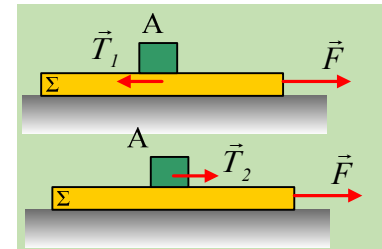


- i) Να εξηγήσετε, πώς μπορεί να επιταχύνεται προς τα δεξιά το σώμα A .
- ii) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος (σώμα A -σανίδα), καθώς και η ολική ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1=3\text{s}$.
- iii) Αν τη στιγμή t_1 το σώμα A έχει ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$, να βρεθούν για τη στιγμή αυτή:
 - a) Η ταχύτητα της σανίδας.
 - β) Το μέτρο της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ σώματος A και σανίδας.
- iv) Τη στιγμή t_1 παύει να ασκείται στη σανίδα η δύναμη \vec{F} με αποτέλεσμα μετά από λίγο το σώμα A να αποκτά την ίδια ταχύτητα με τη σανίδα, ενώ συνεχίζει να βρίσκεται πάνω της. Να υπολογιστεί η κοινή αυτή ταχύτητα των δύο σωμάτων.

Απάντηση:

Τα δυο σώματα ισορροπούν στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε παρακάτω περιοριζόμαστε στις οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα και οι οποίες είναι υπεύθυνες για την κίνησή τους.

- i) Μόλις στην σανίδα ασκηθεί η δύναμη \vec{F} , αυτή τείνει να επιταχυνθεί προς τα δεξιά, οπότε δέχεται από το σώμα A , δύναμη τριβής ολίσθησης \vec{T}_1 , αντίθετης κατεύθυνσης, από την δύναμη \vec{F} . Η αντίδρασή της \vec{T}_2 , έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα, ασκείται στο σώμα A και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του σώματος A .



- ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για κάθε σώμα ξεχωριστά, έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_A = \frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} = \vec{T}_2$$

$$\Sigma \vec{F}_\Sigma = \frac{\Delta \vec{p}_\Sigma}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta \vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \vec{F} + \vec{T}_1$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο παραπάνω εξισώσεων, παίρνουμε:

$$\frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \vec{T}_2 + \vec{F} + \vec{T}_1$$

Αλλά το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της ορμής του

συστήματος, ενώ $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$ (δράση-αντίδραση), οπότε τελικά:

$$\frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t} = \vec{F} \rightarrow \frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2.$$

Αφού η δύναμη \vec{F} είναι σταθερή, άρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής, θα είναι ίσος και με το στιγμιαίο ρυθμό τη στιγμή t_1 . Εξάλλου παρατηρούμε ότι και για το σύστημα των δύο σωμάτων ισχύει ο γενικευμένος νόμος, παίρνοντας όμως τις **εξωτερικές** δυνάμεις μόνο (εδώ τη δύναμη \vec{F}).

Αλλά αφού έχουμε σταθερό ρυθμό μεταβολής της ορμής η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\Delta p_{ολ}}{\Delta t} = F \rightarrow \frac{p_{ολ,1} - 0}{t_1} = F \rightarrow p_{ολ,1} = Ft_1 = 6 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s} = 18 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}.$$

iii) α) Για την ολική ορμή του συστήματος, τη στιγμή t_1 ισχύει:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_\Sigma = \vec{p}_{ολ} \rightarrow$$

$$m v_1 + M \cdot u_1 = p_{ολ,1} \rightarrow$$

οπότε λύνοντας ως προς u_1 παίρνουμε:

$$u_1 = \frac{p_{ολ,1} - m v_1}{M} = \frac{18 - 2 \cdot 3}{3} \text{ m} / \text{s} = 4 \text{ m} / \text{s}$$

β) Εφαρμόζοντας το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Α, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = \frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} = \vec{T}_2 \rightarrow T_2 = \frac{\Delta p_A}{dt} = \frac{m v_1}{t_1 - 0} = \frac{2 \cdot 3}{3} \text{ N} = 2 \text{ N}.$$

Προφανώς λόγω δράσης αντίδρασης και το μέτρο της T_1 που ασκείται στη σανίδα είναι επίσης $T_1 = 2 \text{ N}$.

iv) Για όσο χρόνο το σώμα Α έχει μικρότερη ταχύτητα από τη σανίδα θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης, εξαιτίας της οποίας θα επιταχύνεται. Ταυτόχρονα η τριβή \vec{T}_1 θα επιβραδύνει τη σανίδα. Θα έρθει λοιπόν κάποια στιγμή που τα δυο σώματα θα αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα $\vec{v}_κ$, οπότε τη στιγμή αυτή επειδή δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των σωμάτων η τριβή μηδενίζεται και έτσι, τα σώματα κινούνται πια μαζί με σταθερή ταχύτητα. Μόλις όμως πάψει να ασκείται στη σανίδα η εξωτερική δύναμη \vec{F} το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα, από τη στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή που το σώμα Α σταματά να ολισθαίνει πάνω στη σανίδα, αποκτώντας την ίδια ταχύτητα με αυτήν, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{ολ,1} = \vec{p}_{ολ,κ} \rightarrow m v_1 + M u_1 = (m + M) v_κ \rightarrow$$

$$v_κ = \frac{m v_1 + M u_1}{m + M} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{2 + 3} \text{ m} / \text{s} = 3,6 \text{ m} / \text{s}.$$

