ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 4 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο Α;

(Μονάδες 4)

Α2. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_a^\beta c dx$;

(Μονάδες 4)

Α3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

(Μονάδες 7)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

ε) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$$

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

Β4. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x\neq 0,\ x\neq 1 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq -1 \\ \kappa, & \alpha\nu\ x=1 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases} \qquad g(x)=f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0$$

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Μονάδες 6

Γ2. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \le \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}, \text{ αν } x>1$$

και

$$e^{-x^2+1} \ge \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}, \text{ αν } 0<x<1$$

Μονάδες 4

Γ3. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $\left(0,\ +\infty\right)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A\left(2,\ g(2)\right)$ και $B\left(1,\ g(1)\right)$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}\left(7-3x\right) \le e^{-x^2}\left(x-1\right), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \text{ και}$$

Μονάδες 6

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

(Μονάδες 6)

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^{x}\left(x^2 - 2x + 3\right), \ x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y , και την ευθεία x = 1 .

(Μονάδες 8)

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων Α, Β γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(Μονάδες 5)

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο**.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών