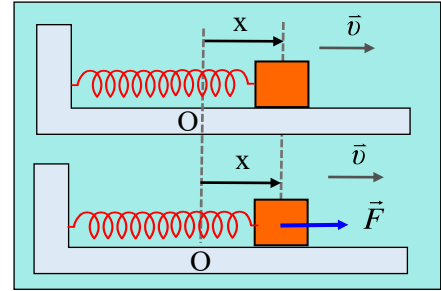


Δύο διαφορετικές ταλαντώσεις

Ένα σώμα Σ είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, εκτελώντας ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,2\eta\mu(6t)$ (μονάδες στο S.I.), σε λείο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από τη θέση O , θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Το ίδιο σύστημα τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης F , ενώ ταυτόχρονα δέχεται



από το περιβάλλον του και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\text{απ}}=-bv$. Μετά την αποκατάσταση σταθερού πλάτους ταλάντωσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας O , λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως αρχή μέτρησης του χρόνου, παίρνουμε την εξίσωση $x=0,2\eta\mu(5t)$ (S.I.), για την απομάκρυνση του σώματος.

Για μια θέση με απομάκρυνση x , όπου το σώμα κινείται προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα:

i) Αν v_1 η ταχύτητα στην περίπτωση της ΑΑΤ και v_2 η ταχύτητα στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, ισχύει:

$$\alpha) v_1 < v_2, \quad \beta) v_1 = v_2, \quad \gamma) v_1 > v_2.$$

ii) Αν a_1 και a_2 οι αντίστοιχες επιταχύνσεις, τότε:

$$\alpha) a_1 < a_2, \quad \beta) a_1 = a_2, \quad \gamma) a_1 > a_2.$$

iii) Σε ποια περίπτωση η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη; Στην ΑΑΤ ή στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, για την ίδια απομάκρυνση x ;

Αν $\frac{dU_1}{dt} = \lambda$ και $\frac{dU_2}{dt} = \mu$ οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, ισχύει:

$$\alpha) \lambda < \mu, \quad \beta) \lambda = \mu, \quad \gamma) \lambda > \mu.$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Αν η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x=A\eta\mu(\omega t)$, τότε η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι της μορφής $v=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$. Λύνοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις ως προς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε:

$$\eta\mu(\omega t) = \frac{x}{A} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \frac{v}{\omega A} \rightarrow$$

$$\eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα, στην θέση με απομάκρυνση x , θα έχει το σώμα στην περίπτωση που έχει μεγαλύτερη γωνιακή συχνότητα. Εδώ $\omega_0 > \omega_8$, συνεπώς στην πρώτη περίπτωση που το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, θα έχει και μεγαλύτερη ταχύτητα. Σωστό το γ).

ii) Για τις δύο επιταχύνσεις έχουμε:

$$a_1 = -\omega_0^2 \cdot x \quad \text{και} \quad a_2 = -\omega_\delta^2 \cdot x$$

Οπότε και πάλι $a_1 > a_2$, σωστό το γ).

iii) Η δυναμική ενέργεια συνδέεται με το έργο της δύναμης επαναφοράς (εδώ η δύναμη του ελατηρίου) με την εξίσωση $W_{F_{ελ}} = -\Delta U = U_{αρχ} - U_{τελ}$. Πράγμα που σημαίνει ότι στη θέση με απομάκρυνση x και στις

δύο περιπτώσεις, έχουμε την ίδια τιμή δυναμικής ενέργειας $U = \frac{1}{2} kx^2$.

Αλλά για το ρυθμό μεταβολής της ισχύει:

α) Στην ελεύθερη αμείωτη ταλάντωση (AAT):

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = -\frac{|F_{ελ}| dx \cdot \sin 180^\circ}{dt} = kx \cdot v_1$$

β) Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση:

$$\frac{dU_2}{dt} = -\frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = -\frac{|F_{ελ}| dx \cdot \sin 180^\circ}{dt} = kx \cdot v_2$$

Οπότε αφού $v_1 > v_2$ (i) ερώτημα, συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{dU_1}{dt} > \frac{dU_2}{dt} \quad \text{ή} \quad \lambda > \mu$$

Σωστό το γ).

Σχόλιο:

Και στο ερώτημα, γιατί η σύγκριση των ταχυτήτων παραπάνω έγινε με την βοήθεια της εξίσωσης:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

και όχι με βάση τη διατήρηση ενέργειας στην ταλάντωση, η απάντηση είναι ότι, ενώ στην περίπτωση της AAT η ενέργεια (K+U) παραμένει σταθερή, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

dmargaris@gmail.com