Τετραγωνική Ρίζα Θετικού Αριθμού

Ορισμός: Τετραγωνική ρίζα ενός **θετικού** αριθμού α, λέγεται ο **θετικός** αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Από τον ορισμό προκύπτει:

- $\mathbf{Αν\ \sqrt{\chi} = \alpha, όπου\ \alpha \geq 0, τότε\ \chi \geq 0\ και\ \chi^2 = \alpha}$
- $\mathbf{Αν\ \alpha \geq 0, τότε\ \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha}$

Π.χ. $\sqrt{4} = 2, γιατί\ 2^2 = 4$

$\sqrt{25} = 5, γιατί\ 5^2 = 25$

Ιδιότητες Τετραγωνικής Ρίζας:

1. Η **υπόρριζη ποσότητα** (ο αριθμός που είναι μέσα στη ρίζα) είναι πάντα **θετικός** αριθμός.

$$\sqrt{-5}\ \boldsymbol{ΔΕΝ}\ ορίζεται,$$
$$αφού\ δεν\ υπάρχει\ αριθμός\ που\ να\ τον\ υψώσω\ στο\ τετράγωνο\ και\ να\ δίνει\ αποτέλεσμα -5$$

✓ ***Για να αποφασίσω αν η ρίζα ορίζεται πρέπει πρώτα να κάνω όλες τις πράξεις που υπάρχουν μέσα στη ρίζα.***

Π.χ. $\sqrt{-2+6} = \sqrt{4}$, *ορίζεται αφού το υπόρριζο είναι θετικός αριθμός*

$\sqrt{-38+4} = \sqrt{-34}$, *δεν ορίζεται αφού το υπόρριζο είναι αρνητικός αριθμός*

Υπενθύμιση:

$$\mathbf{-5^2 = -25}\ ενώ\ \mathbf{(-5)^2 = 25}$$
$$\mathbf{-5^3 = -125}\ και\ \mathbf{(-5)^3 = -125}$$

2. Το **αποτέλεσμα της ρίζας** είναι πάντα **θετικός** αριθμός.

$$\sqrt{25} = 5, γιατί\ 5^2 = 25$$
$$όμως\ και\ (-5)^2 = 25\ άρα\ μπορεί\ \sqrt{\mathbf{25}} = \mathbf{-5}\ ???\ \boldsymbol{ΟΧΙ}$$

3. $\sqrt{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$

4. Η ρίζα είναι αριθμός, και όπως όλοι οι αριθμοί **έχει και αυτή πρόσημο**.

$$\sqrt{4} = 2$$
$$-\sqrt{4} = -2$$

5. **Πολλαπλασιασμός** και **Διαίρεση**

Μπορώ να πολλαπλασιάσω και να διαιρέσω είτε ίδιες ρίζες είτε διαφορετικές.

Η ρίζα **σπάει** και **ενώνεται** ΜΟΝΟ στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση.

$$\sqrt{2}:\sqrt{2}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}&=\sqrt{2\cdot 2}=\sqrt{4}=2\\ \sqrt{8}:\sqrt{2}&=\sqrt{8:2}=\sqrt{4}=2\\ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}&=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2\end{aligned}\right\}\ \text{ενώνεται}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{25\cdot 16}&=\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}=5\cdot 4=20\\ \sqrt{64:16}&=\sqrt{64}:\sqrt{16}=8:4=2\\ \sqrt{\frac{25}{16}}&=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}\end{aligned}\right\}\ \text{σπάει}$$

Οπότε:

- $\alpha\nu\ \boldsymbol{\alpha}\geq\mathbf{0}\ \kappa\alpha\iota\ \boldsymbol{\beta}\geq\mathbf{0},$ *τότε ισχύει* $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$
- $\alpha\nu\ \boldsymbol{\alpha}\geq\mathbf{0}\ \kappa\alpha\iota\ \boldsymbol{\beta}>0,$ *τότε ισχύει* $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

6. Όταν έχουμε **ρίζα μέσα σε ρίζα** υπολογίζουμε τη ρίζα που βρίσκεται **πιο εσωτερικά**.

$$\sqrt{23+\sqrt{1+\sqrt{9}}}=\sqrt{23+\sqrt{1+3}}=\sqrt{23+\sqrt{4}}=\sqrt{23+2}=\sqrt{25}=5$$

$$\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{9}+\sqrt{1}}=\sqrt{5+3+1}=\sqrt{9}=3$$

Στο τελευταίο παράδειγμα δε χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα το $\sqrt{1}$, αφού οι ρίζες που βρίσκονται μέσα στη μεγάλη ρίζα είναι σπασμένες και συνεπώς ανεξάρτητες η μια από την άλλη.

7. **Η ρίζα φεύγει με το τετράγωνο**.

- $\alpha\nu\ \boldsymbol{\alpha}\geq\mathbf{0},$ *τότε* $\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2=\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}^{\,2}=\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2}=\boldsymbol{\alpha}$, δηλαδή όταν το υπόρριζο είναι θετικός αριθμός ή 0, τότε το τετράγωνο φεύγει με τη ρίζα και μένει ο αριθμός.
- $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2}=|\boldsymbol{\alpha}|$, δηλαδή αν δεν έχω περιορισμό για τη ρίζα και το τετράγωνο βρίσκεται μέσα στη ρίζα, τότε φεύγει η ρίζα με το τετράγωνο και μένει η απόλυτη τιμή του αριθμού.

Π.χ. $\left(\sqrt{5}\right)^2=5,\qquad \sqrt{8}^{\,2}=8,\qquad \sqrt{305^2}=305,\qquad \sqrt{(-56)^2}=|-56|=56$

8. Η εξίσωση $\chi^2 = \alpha$

α θετικός αριθμός

άλγεβρα	**γεωμετρία**
$\chi^2 = \alpha$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\alpha}$ $\lvert\chi\rvert = \sqrt{\alpha}$ $\chi = \pm\sqrt{\alpha}$ δηλαδή $\chi = \sqrt{\alpha}$ ή $\chi = -\sqrt{\alpha}$	$\chi^2 = \alpha$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\alpha}$ $\chi = \sqrt{\alpha}$ *Στη γεωμετρία τα αποτελέσματα **δε μπορεί να είναι αρνητικοί αριθμοί.***
$\chi^2 = 4$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{4}$ $\lvert\chi\rvert = 2$ $\chi = \pm 2$ δηλαδή $\chi = 2$ ή $\chi = -2$	$\chi^2 = 4$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{4}$ $\chi = 2$

Ειδικές περιπτώσεις	
α=0	**α αρνητικός αριθμός**
$\chi^2 = 0$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{0}$ $\lvert\chi\rvert = 0$ $\chi = 0$ το 0 δεν έχει πρόσημο!	$\chi^2 = -4$ ***Αδύνατη***!!! *Δεν υπάρχει αριθμός που να τον υψώσω στο τετράγωνο και να κάνει -4.*

Ασκήσεις:

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

Α) $\sqrt{36} =$

Β) $\sqrt{144} =$

Γ) $\sqrt{81} =$

Δ) $\sqrt{144} =$

Ε) $\sqrt{400} =$

Στ) $\sqrt{3600} =$

Ζ) $\sqrt{8100} =$

Η) $\sqrt{0{,}64} =$

Θ) $\sqrt{0{,}04} =$

Ι) $\sqrt{1{,}44} =$

Κ) $\sqrt{\frac{25}{9}} =$

Λ) $\sqrt{\frac{121}{400}} =$

Μ) $\sqrt{\frac{81}{4}} =$

Ν) $\sqrt{\frac{0{,}36}{0{,}0081}} =$

Ξ) $-\sqrt{144} =$

Ο) $-\sqrt{49} =$

Π) $-\sqrt{121} =$

Ρ) $\sqrt{5}^2 =$

Σ) $\sqrt{(-3)^2} =$

Τ) $-\sqrt{\frac{144}{25}} =$

Υ) $\sqrt{4900} =$

2. Να υπολογίσετε όσες από τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες ορίζονται:

Α) $\sqrt{(-5)^2} =$

Β) $\sqrt{-3^2} =$

Γ) $\sqrt{(-2)^3} =$

Δ) $\sqrt{-12}^2 =$

Ε) $\sqrt{-20+36} =$

Στ) $\sqrt{4\cdot(-25)} =$

Ζ) $\sqrt{(-8)\cdot(-2)} =$

Η) $\sqrt{12-3\cdot 4} =$

Θ) $\sqrt{-2^2+20} =$

Ι) $\sqrt{(-3)^2-15} =$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{25}+\sqrt{4}-\sqrt{64} =$

Β) $\sqrt{100}-\sqrt{49}-\sqrt{121} =$

Γ) $5\sqrt{7}-5\sqrt{7} =$

Δ) $-\sqrt{25}+6\sqrt{36}+2\sqrt{16} =$

Ε) $6\sqrt{121}+3\sqrt{81}-\sqrt{400} =$

Στ) $\sqrt{3}^2+2\left(\sqrt{5}\right)^2-1 =$

Ζ) $-2\sqrt{25}+\left(8\sqrt{2}\right)^2 =$

Η) $\left(-3\sqrt{3}\right)^2+7\sqrt{4} =$

Θ) $\dfrac{-\sqrt{64}+8\sqrt{49}}{2\sqrt{4}} =$

Ι) $\dfrac{\sqrt{49}+4}{\sqrt{16}-\sqrt{25}} =$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} =$

Β) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32} =$

Γ) $\sqrt{25\cdot 36} =$

Δ) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} =$

Ε) $\sqrt{64\cdot 49} =$

Στ) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$

Ζ) $\sqrt{\dfrac{400}{64}} =$

Η) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}} =$

Θ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} =$

Ι) $\sqrt{\frac{5}{9}}\cdot\sqrt{5} =$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}} =$

Β) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} =$

Γ) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}+5\sqrt{25} =$

Δ) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} =$

Ε) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}-1 =$

Στ) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} =$

Ζ) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{32}-\sqrt{8}) =$

Η) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{27}-\sqrt{12}) =$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{4+\sqrt{25}}=$

Β) $\sqrt{12\sqrt{9}} =$

Γ) $\sqrt{\sqrt{49}+2} =$

Δ) $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{25}+\sqrt{9}} =$

Ε) $\sqrt{\frac{\sqrt{36}}{2}+6} =$

Στ) $\sqrt{4-\sqrt{9+\sqrt{49}}} =$

Ζ) $\sqrt{4+\sqrt{18+\sqrt{38+\sqrt{121}}}} =$

Η) $\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{\sqrt{16}} =$

Θ) $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{9}}+\sqrt{2+\sqrt{4}}} =$

Ι) $\sqrt{10\sqrt{\sqrt{81}}+3\sqrt{\sqrt{16}}} =$

7. Να βρείτε **όλους τους αριθμούς χ** που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α)$\chi^2 = 4$ β)$\chi^2 = 100$ γ)$\chi^2 = \frac{25}{9}$ δ)$\chi^2 = 0$ ε)$\chi^2 = -36$

8. Να βρείτε τους **θετικούς αριθμούς χ** που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α)$\chi^2 = 25$ β)$\chi^2 = 36$ γ)$\chi^2 = \frac{1}{16}$ δ)$\chi^2 = 0$ ε)$\chi^2 = -4$