Τετραγωνική Ρίζα Θετικού Αριθμού

Ορισμός: Τετραγωνική ρίζα ενός **θετικού** αριθμού α, λέγεται ο **θετικός** αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Ιδιότητες Τετραγωνικής Ρίζας:

1. **Πρόσθεση** και **Αφαίρεση**

Προσθέτω και **Αφαιρώ** μόνο **ίδιες ρίζες**.

Για να προσθέσω ή να αφαιρέσω ρίζες, **κάνω πράξεις με τους συντελεστές** και το **υπόρριζο μένει** πάντα **ίδιο**.

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 9\sqrt{5} + 4\sqrt{2} = 10\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Εδώ οι ρίζες δεν είναι ίδιες, άρα **δεν μπορώ να κάνω πράξεις**! Οπότε το **αποτέλεσμα μένει έτσι**!!!

Προσοχή! $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}, \text{όπου } \alpha, \beta > 0$

Η ρίζα **δε σπάει** και **δεν ενώνεται** στην πρόσθεση και στην αφαίρεση!

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Άρα $\sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

2. **Απλοποίηση** Ρίζας

Οι ρίζες που δεν υπολογίζονται πρέπει πάντα να απλοποιούνται.

Α' τρόπος

Ψάχνω δύο αριθμούς που να έχουν γινόμενο τον αριθμό που είναι μέσα στη ρίζα (δηλαδή αν τους πολλαπλασιάσω το αποτέλεσμα να είναι ο αριθμός που είναι μέσα στη ρίζα) **και ο ένας από τους δύο να έχει ρίζα** (δηλαδή να μπορεί να υπολογιστεί η ρίζα του).

Π.χ. $\sqrt{12}$

$$12 = 2 \cdot 6, \text{όμως ούτε το } \sqrt{2} \text{ υπολογίζεται, ούτε το } \sqrt{6}. \text{ Άρα δε μας κάνει αυτή η επιλογή.}$$
$$12 = 3 \cdot 4, \text{το } \sqrt{4} \text{ υπολογίζεται, άρα μας κάνει αυτή η επιλογή, οπότε:}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}, \text{το οποίο δεν απλοποιείται, συνεπώς μένει έτσι.}$$

Κάποιες φορές μπορεί να χρειαστεί να κάνω περισσότερες από μια απλοποιήσεις.

Π.χ. $\sqrt{72}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

ή

$$\sqrt{72}=\sqrt{9\cdot 8}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}=3\sqrt{8}=3\sqrt{4\cdot 2}=3\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 2\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

Β' Τρόπος

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: Αναλύω το υπόρριζο σε πρώτους παράγοντες και στη συνέχεια επιλέγω ζευγάρια του ίδιου αριθμού, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι το τετράγωνο φεύγει με τη ρίζα.

Π.χ. $\sqrt{\mathbf{12}}$

12	2
6	2
3	3
1	

Ζευγάρι του ίδιου αριθμού

$$12=2^2\cdot 3$$
$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$\sqrt{\mathbf{72}}$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Ζευγάρι του ίδιου αριθμού

Ζευγάρι του ίδιου αριθμού

$$72=2^2\cdot 2\cdot 3^2$$
$$\sqrt{72}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3^2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2}=2\cdot\sqrt{2}\cdot 3=6\sqrt{2}$$

3. **Σύγκριση** με ρίζες

- ✓ Όταν έχω να συγκρίνω **μόνο ρίζες**, τότε μεγαλύτερη είναι η ρίζα που έχει μεγαλύτερο υπόρριζο.
  Π.χ. $\sqrt{11},\sqrt{3},\sqrt{7},\sqrt{5}\ \rightarrow \sqrt{3}<\sqrt{5}<\sqrt{7}<\sqrt{11},\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 3<5<7<11$

- ✓ Όταν έχω να συγκρίνω **ρίζες με αριθμούς** τότε υψώνω κάθε ρίζα και κάθε αριθμό ξεχωριστά στο τετράγωνο και τότε μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που έχει μεγαλύτερο τετράγωνο.
  Π.χ.

Μόνο θετικοί αριθμοί	**Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί**
$2\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ 3,\ 1,\ \sqrt{7},\ 2,\ \sqrt{2}$	$2\sqrt{3},-\sqrt{5},\ 3,-1,-\sqrt{7},\ 2,\ \sqrt{2}$
$\left(2\sqrt{3}\right)^2=2^2\sqrt{3}^2=4\cdot 3=12$	$\left(2\sqrt{3}\right)^2=2^2\sqrt{3}^2=4\cdot 3=12$
$\sqrt{5}^2=5$	$-\sqrt{5}^2=-5$
$3^2=9$	$3^2=9$
$1^2=1$	$-1^2=-1$
$\sqrt{7}^2=7$	$-\sqrt{7}^2=-7$
$2^2=4$	$2^2=4$
$\sqrt{2}^2=2$	$\sqrt{2}^2=2$
$1<2<4<5<7<9<12$ οπότε	$-7<-5<-1<2<4<9<12$ οπότε
$1<\sqrt{2}<2<\sqrt{5}<\sqrt{7}<3<2\sqrt{3}$	$-\sqrt{7}<-\sqrt{5}<-1<\sqrt{2}<2<3<2\sqrt{3}$

4. Η εξίσωση $\chi^2 = \alpha$

α θετικός αριθμός

άλγεβρα	**γεωμετρία**
$\chi^2 = \alpha$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\alpha}$ $\lvert\chi\rvert = \sqrt{\alpha}$ $\chi = \pm\sqrt{\alpha}$ δηλαδή $\chi = \sqrt{\alpha}$ ή $\chi = -\sqrt{\alpha}$	$\chi^2 = \alpha$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\alpha}$ $\chi = \sqrt{\alpha}$ *Στη γεωμετρία τα αποτελέσματα **δε μπορεί να είναι αρνητικοί αριθμοί**.*
$\chi^2 = 4$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{4}$ $\lvert\chi\rvert = 2$ $\chi = \pm 2$ δηλαδή $\chi = 2$ ή $\chi = -2$	$\chi^2 = 4$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{4}$ $\chi = 2$

Ειδικές περιπτώσεις	
α=0	**α αρνητικός αριθμός**
$\chi^2 = 0$ $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{0}$ $\lvert\chi\rvert = 0$ $\chi = 0$ το 0 δεν έχει πρόσημο!	$\chi^2 = -4$ ***Αδύνατη***!!! *Δεν υπάρχει αριθμός που να τον υψώσω στο τετράγωνο και να κάνει -4.*

5. Ρητοποίηση παρονομαστή

Όταν έχουμε ρίζα στον παρονομαστή πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τη ρίζα.

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Ασκήσεις:

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

Β) $2\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} =$

Γ) $5\sqrt{7} - 5\sqrt{7} =$

Δ) $-\sqrt{5} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} =$

Ε) $6\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} =$

Στ) $\sqrt{4} + 2\sqrt{5} - 1 =$

Ζ) $-2\sqrt{25} + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{4} - 5\sqrt{2} =$

Η) $-3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} =$

Θ) $-\sqrt{11} + 8\sqrt{17} - 2\sqrt{11} + 2\sqrt{11} =$

Ι) $\sqrt{49} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4 =$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω ρίζες

α) $\sqrt{8}$ β) $\sqrt{12}$ γ) $\sqrt{32}$ δ) $\sqrt{45}$ ε) $\sqrt{90}$

3. Να βρείτε **όλους τους αριθμούς** χ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α) $\chi^2 = 4$ β) $\chi^2 = 100$ γ) $\chi^2 = \frac{25}{9}$ δ) $\chi^2 = 0$ ε) $\chi^2 = -36$

4. Να βρείτε τους **θετικούς αριθμούς χ** που ικανοποιούν τις εξισώσεις:
α) $\chi^2 = 25$ β) $\chi^2 = 36$ γ) $\chi^2 = \frac{1}{16}$ δ) $\chi^2 = 0$ ε) $\chi^2 = -4$

5. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω αριθμούς:
α) $\sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt{3}$
β) $\sqrt{11},\ 3,\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{5}$
γ) $-2,\ \sqrt{2}, -\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ 2$

6. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:
α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ β) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ γ) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ δ) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ ε) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$