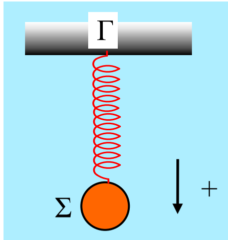
# Ενισχύοντας μια ταλάντωση




Ένα σώμα Σ μάζας 2kg ταλαντώνεται με πλάτος $A_1$=0,2m, στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Γ, γύρω από μια θέση ισοροοπίας Ο, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, καθώς η μέγιστη και η ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

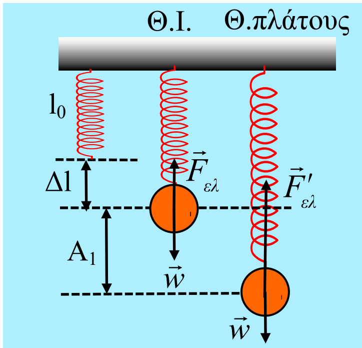
Σε μια στιγμή που το σώμα περνά από το Ο, με κατεύθυνση προς τα κάτω (την θετική κατεύθυνση), ασκούμε στο σώμα μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη F, μέχρι να διανύσει απόσταση Δy=0,2m. Το αποτέλεσμα είναι το σώμα στη συνέχεια, να εκτελέσει μια νέα αατ με πλάτος $A_2$=0,4m.

ii) Αφού αποδειχθεί ότι το έργο της δύναμης F είναι ίσο με την μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του σώματος, να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης.

iii) Πόσο % μετέβαλλε την ενέργεια ταλάντωσης και πόσο % την περίοδο ταλάντωσης του σώματος Σ, η δράση της δύναμης F;

iii) Ποια η ισχύς της δύναμης F, στις θέσεις $y_0$ =0 και $y_1$=0,2m;

### Απάντηση:




i) Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση Δl και η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής, η θέση πλάτους. Για την θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow w - F_{ελ} = 0 \rightarrow mg = k \cdot \Delta l \rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{2 \cdot 10}{200} m = 0,1m$$

Έτσι για την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2} DA_1^2 = \frac{1}{2} kA_1^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 0,2^2 J = 4J$$

Ενώ για το ελατήριο, αφού το πλάτος είναι μεγαλύτερο από την επιμήκυνσή του, σημαίνει ότι στην πάνω ακραία θέση έχει συσπειρωθεί, συνεπώς έχει κάποια δυναμική ενέργεια. Αλλά τότε η ελάχιστη δυναμική του ενέργεια είναι στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, οπότε $U_{min}$=0.

Τη μέγιστη δυναμική ενέργεια, θα την έχει στην θέση με την μεγαλύτερη παραμόρφωση και αυτή είναι η θέση πλάτους, στο παραπάνω σχήμα, όπου $\Delta l_{max}$=Δl+$A_1$=0,3m, οπότε:

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \left(\Delta l_{max}\right)^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 0,3^2 J = 9J$$

ii) Η δύναμη F ασκήθηκε στο σώμα από την θέση y=0, έως την θέση $y_1$=$A_1$=0,2m. Εφαρμόζουμε για την παραπάνω μετατόπιση το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα Σ.

$$K_1 - K_0 = W_{F_{\varepsilon\pi}} + W_F \quad (1)$$

όπου το έργο της δύναμης επαναφοράς, μιας συντηρητική δύναμης, συνδέεται με την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης, με τη σχέση:

$$W_{F_{\varepsilon\pi}} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0 - \frac{1}{2}Dy_1^2 = -\frac{1}{2}ky_1^2$$

Τότε από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -\frac{1}{2}ky_1^2 + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}ky_1^2\right) - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \rightarrow$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η παρένθεση δίνει την ενέργεια ταλάντωσης, μετά την άσκηση της δύναμης F, ενώ η κινητική ενέργεια στην θέση ισορροπίας, είναι ίση με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης. Συνεπώς:

$$W_F = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}kA_2^2 - \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}k\left(A_2^2 - A_1^2\right) \rightarrow$$

$$F \cdot \Delta y_1 = \frac{1}{2}k\left(A_2^2 - A_1^2\right) \rightarrow$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}k\left(A_2^2 - A_1^2\right)}{\Delta y_1} = \frac{\frac{1}{2}200\left(0{,}4^2 - 0{,}2^2\right)}{0{,}2}N = 60N$$

iii) Το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης του σώματος, είναι ίσο:

$$\pi\% = \frac{\Delta E}{E_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}k\left(A_2^2 - A_1^2\right)}{\frac{1}{2}kA_1^2}100\% = \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1\right)100\% = \left(\frac{0{,}4^2}{0{,}2^2} - 1\right)100\% = 300\%$$

Αντίθετα το ποσοστό μεταβολής της περιόδου είναι 0%, αφού η περίοδος ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

συνεπώς είναι σταθερή αφού δεν εξαρτάται από την ενέργεια ταλάντωσης του σώματος.

iv) Η ισχύς της δύναμης F, δίνεται από την εξίσωση:

$$P = \frac{dW_F}{dt} = \frac{F \cdot dx \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Οπότε στη θέση y=0, όπου η ταχύτητα είναι μέγιστη, ενώ η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας είναι μηδενική, θα έχουμε:

$$P_o = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = F \cdot \omega A_1 = F \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 = 60\sqrt{\frac{200}{2}} \cdot 0,2W = 120W$$

Εξάλλου από την ενέργεια της δεύτερης ταλάντωσης, θα πάρουμε για την ταχύτητα του σώματος στην θέση $y_1$:

$$\frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2} k y_1^2 = \frac{1}{2} k A_2^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = +\sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left(A_2^2 - y_1^2\right)} = \sqrt{\frac{200}{2} \cdot \left(0,4^2 - 0,2^2\right)} m/s = 2\sqrt{3} m/s$$

αφού το σώμα κινείται προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση). Αλλά τότε για την ισχύ στη θέση $y_1$, έχουμε:

$$P_1 = F \cdot \upsilon_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 60 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1W = 120\sqrt{3}W$$

***dmargaris@gmail.com***