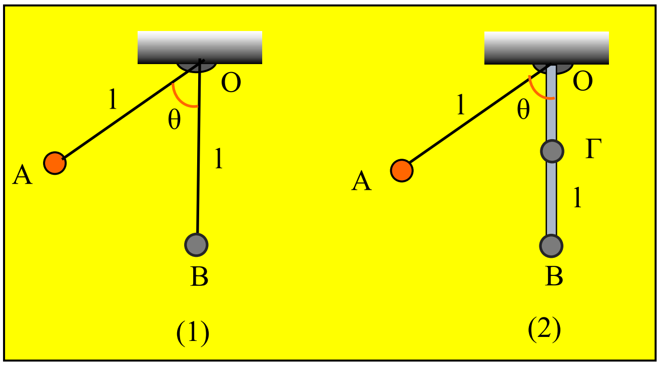
Η διατήρηση της στροφορμής και η αβαρής ράβδος

Δυο όμοιες μικρές σφαίρες Α και Β, της ίδιας μάζας, κρέμονται από το ίδιο σημείο Ο στα άκρα δύο αβαρών νημάτων του ίδιου μήκος l. Εκτρέπουμε την σφαίρα Α, όπως στο σχήμα (1) κατά κάποια γωνία θ και αφήνοντάς την φτάνει στην κατακόρυφη θέση με ταχύτητα $υ_0$, οπότε συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την σφαίρα Β, με αποτέλεσμα η Β να αποκτά ταχύτητα $υ_0$, αμέσως μετά την κρούση.



Αντικαθιστούμε το ένα νήμα με αβαρή ράβδο, αλλά τώρα πάνω της στερεώνουμε εκτός της σφαίρας Β και μια άλλη όμοιά της σφαίρα Γ, στο μέσον της ράβδου, όπως στο σχήμα (2). Αν επαναλάβουμε το πείραμα να αποδείξετε ότι η σφαίρα Β, μετά την κρούση, θα αποκτήσει ταχύτητα $υ_1$, μικρότερη της $υ_0$.

Απάντηση:

Για την ελαστική κρούση στο σχήμα (1) εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας του συστήματος (πριν και μετά την κρούση).

Τα πράγματα δεν είναι ίδια, αν την θέση του αβαρούς νήματος, πάρει μια αβαρής ράβδος. Τώρα δεν υπάρχει η σφαίρα Β, έχουμε ένα **στερεό σώμα**, το οποίο αποτελείται από την ράβδο και τις δύο σφαίρες Β και Γ και με αυτό το στερεό σώμα, θα συγκρουστεί η σφαίρα Α.

Έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΟ σαν να συγκρούονται δύο σημειακές μάζες Α και Β, μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε για την κρούση αυτή την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος, γύρω από το σημείο Ο, αφού στη διάρκεια της κρούσης, οι εξωτερικές δυνάμεις, διέρχονται όλες από το Ο, με αποτέλεσμα η συνολική ροπή τους να είναι μηδενική.

Έστω λοιπόν ότι και στο σχήμα (2) η σφαίρα Β αποκτά μετά την κρούση ταχύτητα $υ_0$, ενώ η Α ακινητοποιείται. Τότε από την ΑΔΣ θα έχουμε:

$$\vec{L}_{πρ} = \vec{L}_{μετ} \rightarrow \vec{L}_{A,πρ} = \vec{L}_{B,μετ} + \vec{L}_{Γ,μετ} + \vec{L}_{ρ,μετ}$$

Αλλά η ράβδος θεωρούμε ότι έχει μηδενική μάζα άρα και μηδενική στροφορμή, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτή αποτελείται από πολλά μικρά υλικά σημεία, με μηδενική μάζα το καθένα, οπότε:

$$mυ_0 l = mυ_0 l + mυ_Γ \cdot \frac{l}{2}$$

Για να ισχύει η τελευταία εξίσωση θα πρέπει η σφαίρα Γ να αποκτήσει μηδενική ταχύτητα, πράγμα άτοπο, αφού αν αποκτήσει η Β σφαίρα ταχύτητα $υ_0=ωl$, τότε η Γ θα αποκτήσει ταχύτητα $υ_Γ = ω \cdot \frac{l}{2} = \frac{υ_0}{2}$.

Συμπέρασμα, η σφαίρα Β στην κρούση στο σχήμα (2), θα αποκτήσει ταχύτητα $υ_1 < υ_0$, αφού ένα μέρος της αρχικής στροφορμής μεταφέρεται στην σφαίρα Γ. Με άλλα λόγια η δεύτερη κρούση, είναι εντελώς διαφορετική από την αντίστοιχη του σχήματος (1).

Σχόλια:

1) Την ίδια αποδεικτική διαδικασία, θα μπορούσαμε να κάνουμε και με την χρήση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α. Δεν θα μπορούσε να μεταφερθεί όλη η αρχική κινητική ενέργεια της Α σφαίρας, στην Β, αφού και η Γ θα αποκτήσει κάποια κινητική ενέργεια...

2) Και αν μας έλεγαν να υπολογίσουμε συναρτήσει της $υ_0$ την ταχύτητα που θα αποκτήσει η σφαίρα Β, στην περίπτωση του σχήματος (2); Θα εφαρμόζαμε για την ελαστική κρούση όχι την ΑΔΟ, αλλά την ΑΔΣ, ως προς το Ο, οπότε θα είχαμε:

$$\vec{L}_{πρ} = \vec{L}_{μετ} \rightarrow mυ_0 l = mυ_A l + mυ_B l + mυ_Γ \cdot \frac{l}{2} \quad (1)$$

$$K_{πρ} = K_{μετ} \rightarrow \frac{1}{2}mυ_0^2 = \frac{1}{2}mυ_A^2 + \frac{1}{2}mυ_B^2 + \frac{1}{2}mυ_Γ^2 \quad (2)$$

$$υ_Γ = ω \cdot \frac{l}{2} = \frac{υ_B}{2} \quad (3)$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος των τριών εξισώσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τελικές ταχύτητες $υ_A$, $υ_B$ και $υ_Γ$ των τριών σφαιρών, μετά την κρούση.

dmargaris@gmail.com