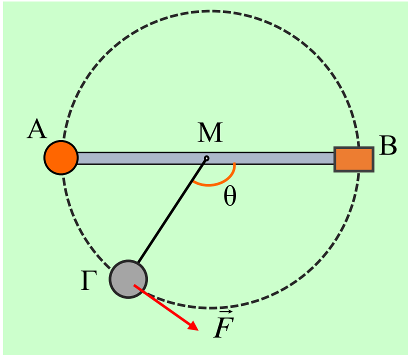
# *Η στροφορμή και μια πλαστική κρούση*




Στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου μήκους 2m έχουν στερεωθεί μια σφαίρα Α μάζας $m_1$=3kg και ένα μικρό σώμα Β που θεωρείται υλικό σημείο μάζας $m_2$=1kg, παίρνοντας έτσι ένα στερεό s. Το στερεό s ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το μέσον Μ της ράβδου. Μια άλλη σφαίρα Γ, μάζας Μ=4kg ηρεμεί επίσης στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, δεμένη στο άκρο αβαρούς νήματος σταθερού μήκους 1m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στον άξονα z, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Σε μια στιγμή $t_0$=0, η σφαίρα Γ δέχεται μια σταθερού μέτρου δύναμη F=4N, η οποία είναι διαρκώς κάθετη στο νήμα, με αποτέλεσμα να κινηθεί κυκλικά. Αφού η σφαίρα διαγράψει γωνία θ=2rad, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Β, ενώ τη στιγμή της σύγκρουσης, παύει να ασκείται πάνω της η δύναμη F.

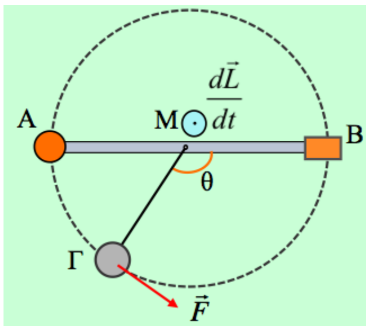
i) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Γ, ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς Μ, στη διάρκεια της εξάσκησης της δύναμης F.

ii) Να βρεθεί η στροφορμή της σφαίρας Γ, ως προς τον άξονα z, ελάχιστα πριν την κρούση.

iii) Να υπολογισθεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην πλαστική κρούση μεταξύ της σφαίρας Γ και του σώματος Β.

iv) Πόσο είναι το έργο της δύναμης $F_B$ που η σφαίρα Γ άσκησε στο σώμα Β και ποιο το αντίστοιχο έργο της αντίδρασής της.

### *Απάντηση:*




i) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Γ, σύμφωνα με το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, είναι ίσος με την ροπή της δύναμης ως προν τον άξονα z, άρα ένα διάνυσμα πάνω στον άξονα, με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα και σταθερό μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_F = F \cdot R = 4 \cdot 1\, kgm^2/s^2 = 4\, kgm^2/s^2$$

ii) Η σφαίρα Γ με την επίδραση εφαπτομενικής στην τροχιά δύναμης, αποκτά επιτρόχια επιτάχυνση, μέτρου:

$$F = M\alpha_{\varepsilon\pi} \rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{F}{M} = \frac{4}{4} m/s^2 = 1 m/s^2$$

Συνεπώς η σφαίρα, κατά την επιταχυνόμενη κυκλική της κίνηση, γύρω από το Μ, έχει γωνιακή επιτάχυνση, ίδιας κατεύθυνσης με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής (δες παραπάνω), με μέτρο:

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\varepsilon\pi}}{R} = \frac{1}{1} rad/s^2 = 1rad/s^2 .$$

Αλλά τότε η επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση της σφαίρας περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \quad (1) \qquad \kappa\alpha\iota \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \quad (2)$$

Με απαλοιφή του χρόνου από τις δύο παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \rightarrow \omega = \sqrt{2\alpha_{\gamma\omega\nu}\theta} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 2} rad/s = 2rad/s$$

Αλλά τότε η στροφορμή της σφαίρας Γ, ως προς τον άξονα z έχει την κατεύθυνση του αντίστοιχου ρυθμού μεταβολής της και μέτρο:

$$L_\Gamma = M\upsilon_\Gamma R = M\omega R^2 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \, {kgm^2}/{s} = 8 \, {kgm^2}/{s}$$

iii) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα, κατά την πλαστική κρούση, οπότε θα πάρουμε:

$$\vec{L}_\pi = \vec{L}_\mu \rightarrow L_\Gamma = L'_A + L'_B + L'_\Gamma \xrightarrow{R=1/2}$$
$$L_\Gamma = m_1 uR + m_2 uR + MuR \rightarrow$$
$$u = \frac{L_\Gamma}{(m_1 + m_2 + M)R} = \frac{8}{(3+1+4)\cdot 1} m/s = 1m/s$$

αφού μετά την πλαστική κρούση και τα τρία υλικά σημεία κινούνται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, διαγράφοντας τον ίδιο κύκλο ακτίνας ίσης με το μισό μήκος της ράβδου, συνεπώς έχοντας και την ίδια γραμμική ταχύτητα. Αλλά τότε για την απώλεια της μηχανικής ενέργειας, θα έχουμε:

$$E_{\alpha\pi} = |\Delta K| = \frac{1}{2}M\upsilon_\Gamma^2 - \left(\frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 + \frac{1}{2}Mu^2\right) \rightarrow$$
$$|\Delta K| = \frac{1}{2}M\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_1 + M)u^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 2^2 J - \frac{1}{2}8 \cdot 1^2 J = 4J$$

iv) Το έργο της δύναμης $F_B$, μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται από την σφαίρα Γ στο υλικό σημείο Β. Όμως αυτή η ενέργεια δεν παραμέενι μόνο σαν κινητική ενέργεια του Β, αλλά ένα μέρος μεταφέρεται μέσω της ράβδου, στη σφαίρα Α. Έτσι εφαρμόζοντας για το στερεό s, το Θ.Μ.Κ.Ε, παίρνουμε:

$$\Delta K = W_{F_B} \rightarrow W_{F_B} = \frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 - 0 \rightarrow$$
$$W_{F_B} = \frac{1}{2}(3+1)\cdot 1^2 J = 2J$$

Η αντίδραση της παραπάνω δύναμης, ας την ονομάσουμε $F_\Gamma$ ασκείται στη σφαίρα Γ από το υλικό σημείο Β. Έτσι εφαρμόζοντας ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε, αλλά τώρα για την σφαίρα Γ, στη διάρκεια της κρούσης, θα πάρουμε:

$$\Delta K = W_{F_\Gamma} \rightarrow W_{F_\Gamma} = \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}M\upsilon^2 \rightarrow$$
$$W_{F_B} = \frac{1}{2}4 \cdot 1^2 J - \frac{1}{2}4 \cdot 2^2 J = -6J$$

***Σχόλιο:***

Τι μας λένε τα παραπάνω έργα; Η σφαίρα Γ χάνει κινητική ενέργεια 6J, αλλά μόνο τα 2J μεταφέρονται στο στερεό s. Τα υπόλοιπα 4J είναι αυτά τα οποία βρήκαμε στο iii) ερώτημα. Είναι η κινητική ενέργεια που «χάθηκε»! Προφανώς βέβαια το χάθηκε, είναι σχήμα λόγου! Είναι η ενέργεια που συνήθως γράφεται ότι μετετράπη σε θερμότητα. Στην πραγματικότητα είναι η ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική ενέργεια των σωμάτων Β και Γ (αύξηση της εσωτερικής τους ενέργειας) και σαν ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης των δύο σωμάτων. Αν κάποιο μικρό μέρος από αυτήν την θερμική ενέργεια μεταφερθεί στη συνέχεια στον αέρα, λόγω διαφοράς θερμοκρασίας, αυτό το ποσόν δικαιούται να ονομάζεται θερμότητα.

***dmargaris@gmail.com***