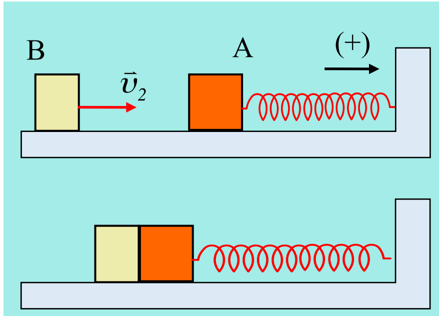
Μια ελαστική κρούση μεταξύ δύο αατ



Ένα σώμα Α μάζας m_1=2kg είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200N/m και εκτελεί αατ σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με πλάτος A_o=0,5m. Ένα δεύτερο σώμα Β μάζας m_2=1kg κινείται με ταχύτητα υ_2=12m/s κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Α. Θεωρείστε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, ενώ η κρούση έχει απειροελάχιστη διάρκεια.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Α, μετά την κρούση, αν αυτή πραγματοποιείται σε μια στιγμή που έχει μηδενική ταχύτητα.

ii) Αν η κρούση γίνει τη στιγμή που το σώμα Α περνά από την θέση ισορροπίας του, πόση θα είναι τελικά η ενέργεια της νέας ταλάντωσής του, μετά την κρούση;

iii) Αν το σώμα Α μετά την κρούση έχει την μέγιστη δυνατή ενέργεια ταλάντωσης:

α) Να βρεθεί η μέγιστη αυτή ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Α.

β) Να βρεθεί η θέση της κρούσης, καθώς και η ταχύτητα του Α ελάχιστα πριν την κρούση.

Απάντηση:

i) Αν η κρούση γίνει τη στιγμή της μηδενικής ταχύτητας του σώματος Α, σημαίνει ότι αυτό βρίσκεται σε θέση πλάτους και μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 = \frac{2\cdot 1}{2+1}12m/s = 8m/s$$

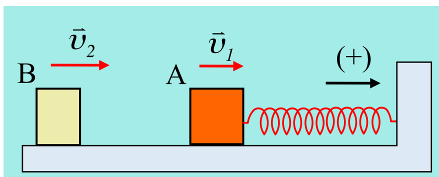
Άρα η νέα ενέργεια ταλάντωσής του Α είναι ίση:

$$E_1 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}kA_o^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0,5^2J + \frac{1}{2}2\cdot 8^2J = 89J$$

ii) Αν η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας, τότε το σώμα Α έχει μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα:

$$\upsilon_{1,0} = \omega A_o = A_o\sqrt{\frac{k}{m_1}} = 0,5\sqrt{\frac{200}{2}}m/s = 5m/s$$

Όσον αφορά την κατεύθυνσή της διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



α) Το σώμα Α κινείται και αυτό προς τα δεξιά. Τότε η ταχύτητα του σώματος Α μετά την κρούση θα είναι ίση:

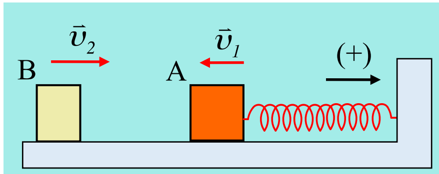
$$\upsilon_{1\alpha}' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{10} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon'_{1\alpha} = \frac{2-1}{2+1}5m/s + \frac{2\cdot 1}{2+1}12m/s = \frac{29}{3}m/s$$

Την ταχύτητα αυτή έχει στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης, ίση με την κινητική ενέργεια στην θεση ισορροπίας, θα είναι ίση:

$$E_{2\alpha} = \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{1\alpha} = \frac{1}{2}2\cdot\left(\frac{29}{3}\right)^2 J = 93,4J$$

β) Αν το σώμα Α κινείται αντίθετα, τότε:



$$\upsilon'_{1\beta} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon'_{1\beta} = \frac{2-1}{2+1}(-5)m/s + \frac{2\cdot 1}{2+1}12m/s = \frac{19}{3}m/s$$

Οπότε, όμοια με πριν:

$$E_{2\beta} = \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{1\beta} = \frac{1}{2}2\cdot\left(\frac{19}{3}\right)^2 J = 40,1J$$

iii) Για την ελαστική κρούση, έχουμε για τις κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Όπου u_1 και u_2 οι ταχύτητες μετά την κρούση.

α) Αλλά τότε η τελική κινητική ενέργεια του σώματος Α, $K'_1 = \frac{1}{2}m_1u_1^2$ θα γίνει μέγιστη, αν όλη η ενέργεια του σώματος Β μεταφερθεί στο Α, με αποτέλεσμα να ακινητοποιηθεί το σώμα Β. Αλλά τότε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2$$

Η ενέργεια ταλάντωσης τώρα του σώματος Α αμέσως μετά την δεύτερη κρούση του είναι ίση:

$$E_3 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

$$E_3 = \frac{1}{2}kA_o^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι και η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση παίρνει τη μέγιστη τιμή της, αυξημένη κατά $\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$ σε σχέση με την αρχική τιμή της, στην περίπτωση της ακινητοποίησης του σώματος Β.

$$E_{3max} = \frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 0,5^2 J + \frac{1}{2}1 \cdot 12^2 J = 97J$$

β) Για την παραπάνω κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει για την ταχύτητα του Β σώματος, μετά την κρούση:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$$

Θέτοντας στην (2) u_2=0 και λύνοντας ως προς υ_1 παίρνουμε:

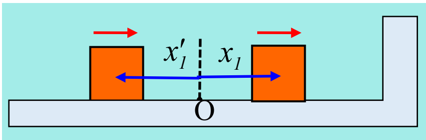
$$\upsilon_1 = -\frac{m_2 - m_1}{2m_1}\upsilon_2 = -\frac{1-2}{2 \cdot 2}12m/s = 3m/s$$

Τώρα από την διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε για την θέση x_1 του σώματος Α, πριν την κρούση:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}kA_o^2$$

$$x_1 = \pm\sqrt{A_o^2 - \frac{m_1}{k}\upsilon_1^2} = \pm\sqrt{0,5^2 - \frac{2}{200}3^2}m = \pm 0,4m$$

Έχουμε δηλαδή δύο δυνατές θέσεις κρούσεις, όταν το σώμα Α βρίσκεται σε απομάκρυνση (από την θέση ισορροπίας Ο) x_1=+0,4m και x'_1=-0,4m, όπως φαίνονται στο σχήμα, ενώ έχει ταχύτητα προς τα δεξιά υ_1=3m/s.



dmargaris@gmail.com