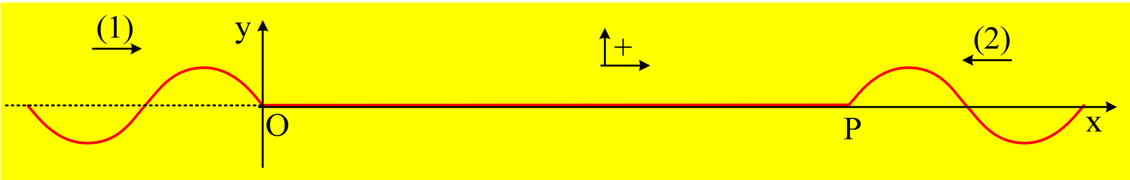
Δύο κύματα διαδίδονται αντίθετα

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δύο όμοια εγκάρσια αρμονικά κύματα (1) και (2) και τη στιγμή $t_0=0$, φτάνουν στα σημεία Ο και Ρ, όπως στο σχήμα, όπου (ΟΡ)=5m. Θεωρώντας το σημείο Ο, ως αρχή ενός προσανατολισμένου συστήματος αξόνων (x,y)=(0,0), η εξίσωση του πρώτου κύματος, το οποίο διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση είναι της μορφής:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right) \quad (S.I.) \quad (1)$$



i) Να βρεθεί η εξίσωση του δεύτερου κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

iii) Αφού πρώτα βρείτε τη συνάρτηση y=f(x), για την απομάκρυνση κάθε σημείου του μέσου, μεταξύ Ο και Ρ, σε συνάρτηση με την θέση του, να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου, τις χρονικές στιγμές:

α) $t_α=1,5s$, β) $t_β=3s$ και $t_γ=3,5s$.

iv) Να βρεθεί η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Β, στη θέση x=1,75m τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

Απάντηση:

Τα σημεία Ο και Ρ στα οποία φτάνουν τα δυο κύματα, ξεκινούν την ταλάντωσή τους από την θέση ισορροπίας του κινούμενα προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση). Εξάλλου από την εξίσωση το πρώτου κύματος προκύπτει ότι το πλάτος των δύο όμοιων κυμάτων είναι Α=0,2m, το μήκος κύματος λ=2m ενώ η περίοδος ταλάντωσης των σημείων το μέσου είναι ίση με Τ=2s ($f=0,5Hz$).

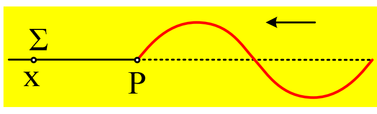
Αλλά τότε η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων (προφανώς ίδια), είναι:

$$\upsilon = \lambda f = 2 \cdot 0,5m/s = 1m/s$$

i) Γράφουμε την εξίσωση για την απομάκρυνση το σημείου Ρ, στο οποίο φτάνει το δεύτερο κύμα. Με βάση τα παραπάνω αυτή θα έχει τη μορφή:

$$y_P = 0,2 \cdot \eta\mu\omega t = 0,2 \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}t \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε παίρνοντας ένα τυχαίο σημείο Σ του μέσου στη θέση x, στο οποίο δεν έχει φτάσει το κύμα, αυτό θα καθυστερήσει να αρχίσει την ταλάντωσή του κατά:



$$d=\upsilon t' \rightarrow t'=\frac{d}{\upsilon}=\frac{(OP)-x}{\upsilon}=\frac{5-x}{1}=5-x \ \ (S.I.)$$

Αλλά τότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του, θα έχει την μορφή:

$$y_{\Sigma}=0,2\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-t'\right)=0,2\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-5+x\right) \rightarrow$$

$$y_2=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right) \ \ (S.I.) \ \ (2)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει την απομάκρυνση ενός τυχαίου σημείου του μέσου και δεν είναι παρά η εξίσωση του κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά.

ii) Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σημείου Μ στο οποίο συμβάλουν τα δύο κύματα, θα πάρουμε:

$$y=y_1+y_2=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right)+0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right)\rightarrow$$

$$y=2\cdot 0,2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\frac{t-x-t-x+5}{2}\cdot\eta\mu\pi\frac{t-x+t+x-5}{2}\rightarrow$$

$$y_{\sigma}=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\pi x\right)\cdot\eta\mu\left(\pi t-\frac{5\pi}{2}\right) \ \ (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος για την περιοχή που έχουμε συμβολή των δύο τρεχόντων κυμάτων.

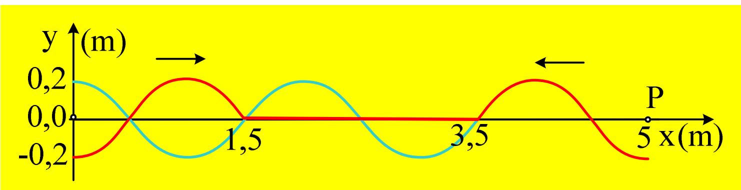
iii) α) Μέχρι τη στιγμή t_α, τα δυο κύματα έχουν διαδοθεί σε αποστάσεις $d_1=d_2=\upsilon t_\alpha=1{,}5m$, ενώ με αντικατάσταση του χρόνου στις δύο παραπάνω εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων, αφού δεν έχουμε ακόμη συμβολή τους, παίρνουμε:

$$y_{1,\alpha}=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{1,5}{2}-\frac{x}{2}\right)=0,2\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\pi x\right)=-0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \ \text{με } x\leq 1{,}5m$$

$$y_{2,\alpha}=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{1,5}{2}+\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right)=0,2\cdot\eta\mu\left(-3,5\pi+\pi x\right)=+0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \ \text{με } x\geq 3{,}5m$$

Αφού το 2ο κύμα ξεκινώντας από την θέση $x_P=5m$, έχει διαδοθεί προς τα αριστερά κατά 1,5m.

Στο παρακάτω σχήμα με κόκκινο χρώμα η μορφή του μέσου μεταξύ Ο και Ρ.



Η γαλάζια γραμμή μας δείχνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης y=+0,2·συν(πx) στο τμήμα 0-3,5m της χορδής, που όμως δεν έχει διαδοθεί το κύμα προς τα αριστερά.

β) Με την ίδια λογική τη χρονική στιγμή $t_\beta=3s$, τα κύματα έχουν διαδοθεί κατά $d_B=\upsilon t_\beta=3m$, ενώ με αντικατάσταση του χρόνου στις εξισώσεις των κυμάτων παίρνουμε:

$$y_{1,\beta} = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\right)=0,2 \cdot \eta\mu\left(3\pi - \pi x\right)=0,2\eta\mu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \text{με } x \leq 3m$$

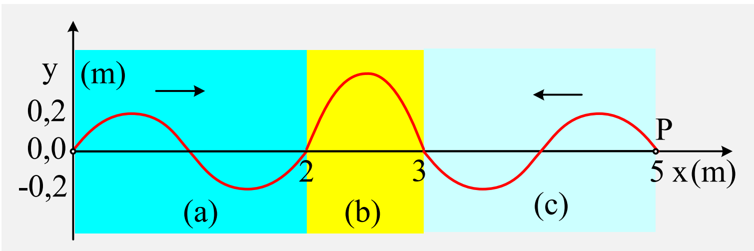
$$y_{2,\beta}=0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right)=0,2 \cdot \eta\mu\left(-2\pi + \pi x\right)=-0,2 \cdot \eta\mu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \text{με } x \geq 2m$$

Αλλά όμως με βάση τους παραπάνω περιορισμούς στα πεδία ορισμού, για τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων, βλέπουμε ότι στην περιοχή $2m \leq x \leq 3m$ έχουν διαδοθεί και τα δυο κύματα, άρα έχουμε συμβολή, το αποτέλεσμα της οποίας δίνει η εξίσωση (3). Από την εξίσωση του στάσιμου, για την περιοχή αυτή θα πάρουμε:

$$y_{\sigma,\beta} = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\pi x\right)\cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{5\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\pi x\right)\cdot \eta\mu\left(3\pi - \frac{5\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_{\sigma,\beta} = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x)\cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \ \gamma\iota\alpha \ \ 2m \leq \ x \ \leq 3m$$

Συνεπώς το στιγμιότυπο που θα σχεδιάσουμε θα έχει τρεις περιοχές: a) $0 \leq x \leq 2m$, όπου θα έχουμε το κύμα (1), την περιοχή b) $2m < x \leq 3m$, όπου έχουμε στάσιμο κύμα και c) την περιοχή $3m < x \leq 5m$ όπου έχουμε το τρέχον κύμα (2), το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά. Με βάση δε τις παραπάνω εξισώσεις σχεδιάζουμε τη μορφή του μέσου:



γ) Τέλος για τη χρονική στιγμή t_γ=3,5s, τα τρέχοντα κύματα έχουν διαδοθεί κατά $d_\gamma = \upsilon t_\gamma$=3,5m, οπότε θα έχουμε το κύμα προς τα δεξιά στην περιοχή $0 \leq x \leq 1,5m$, στάσιμο κύμα στην περιοχή $1,5m < x \leq 3,5m$ και το κύμα προς τα αριστερά για $3,5m < x \leq 5m$. Ενώ οι αντίστοιχες εξισώσεις κυμάτων μας δίνουν:

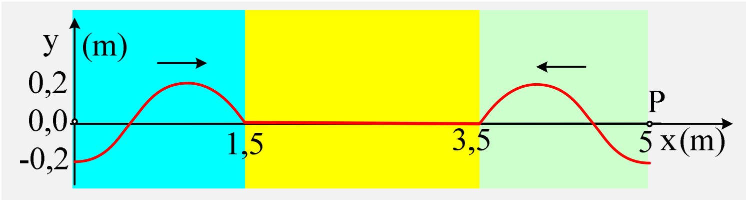
$$y_{1,\gamma} = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{3,5}{2}-\frac{x}{2}\right)=0,2 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \pi x\right)=-0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \text{(a)}$$

$$y_{2,\gamma}=0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{3,5}{2}+\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right)=0,2 \cdot \eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2} + \pi x\right)=+0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \ \ (S.I.) \ \text{(c)}$$

$$y_{\sigma,\gamma} = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\pi x\right)\cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{5\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\pi x\right)\cdot \eta\mu\left(3,5\pi - 2,5\pi\right) \rightarrow$$

$$y_{\sigma,\beta} = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x)\cdot \eta\mu\left(\pi\right) = 0 \ \ \gamma\iota\alpha \ \ 1,5m < x \ \leq 3,5m \ \ \ (b)$$

Με βάση τις τρεις παραπάνω συναρτήσεις y=f(x), σχεδιάζουμε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή t_γ:



iv) Όσον αφορά την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β στη θέση x=1,75m, έχουμε:

- Τη στιγμή $t_α$ κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Β, το οποίο παραμένει ακίνητο (υ=0).
- Τη στιγμή $t_β$ στο σημείο έχει φτάσει μόνο το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά, οπότε για την απομάκρυνσή $y_{1,B}$ ισχύει η εξίσωση:

$$y_{1,\beta}=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right)=0,2\cdot\eta\mu\left(\pi t-1,75\pi\right)\ \ (S.I.)$$

Αλλά τότε η ταχύτητα ταλάντωσής του θα είναι:

$$\upsilon_{1,\beta}=0,2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right)=0,2\cdot\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(3\pi-1,75\pi\right)=0,2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1,25\pi\right)\ \rightarrow$$

$$\upsilon_{1,\beta}=0,2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=0,2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m/s=-0,1\sqrt{2}\pi\ m/s$$

- Τέλος για $t=t_γ$=3,5s, στο σημείο Β έχουν φτάσει και τα δυο κύματα, οπότε για την απομάκρυνσή του $y_{σ,γ}$ θα έχουμε:

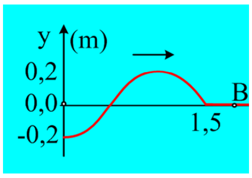
$$y_{\sigma,\gamma}=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\pi x\right)\cdot\eta\mu\left(\pi t-\frac{5\pi}{2}\right)=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-1,75\pi\right)\cdot\eta\mu\left(\pi t-2,5\pi\right)\rightarrow$$

$$y_{\sigma,\gamma}=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu\left(\pi t-2,5\pi\right)$$

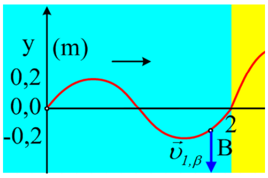
Αλλά τότε η ταχύτητά του δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_{\sigma,\gamma}=\omega\cdot 0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi t-2,5\pi\right)=0,4\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi=+0,2\sqrt{2}\pi\ m/s$$

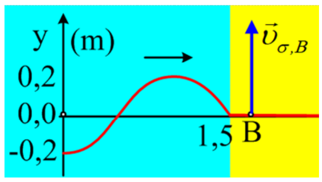
Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι θέσεις και οι ταχύτητες του σημείου Β, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.



t_a



t_β



t_γ

dmargaris@gmail.com