Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις και λύσεις
όλων των ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων
ανά θεματική Ενότητα

2ο Μέρος

Το παρόν ένθετο διατίθεται μαζί με το βιβλίο *Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, β΄ τόμος* (ISBN 978-960-16-5250-4).

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ Α΄ ΤΕΥΧΟΥΣ

2α ΘΕΜΑΤΑ

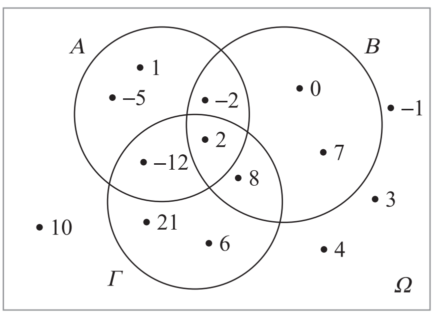
ΘΕΜΑ 2_13096

α) Αν A, B, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ **ii)** $B \cap \Gamma$ **iii)** $(A \cap B) \cap \Gamma$ **iv)** A'

(*Μονάδες 12*)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα A, B, Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (*Μονάδες 13*)



Λύση

α) **i)** Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.

ii) Πραγματοποιείται και το B και το Γ.

iii) Πραγματοποιείται και το A και το B και το Γ.

iv) Δεν πραγματοποιείται το A.

β) Έχουμε

$$\Omega = \{-1, 3, 4, 10, 1, -5, -12, 2, -2, 21, 6, 8, 0, 7\},$$

άρα $N(\Omega) = 14$.

i) $A \cup B = \{1, -5, -12, 2, -2, 0, 7, 8\}$, άρα

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

ii) $B \cap \Gamma = \{8, 2\}$, άρα

$$P(B \cap \Gamma) = \frac{N(B \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

iii) $(A \cap B) \cap \Gamma = \{2\}$, άρα

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{N(A \cap B \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{14}.$$

iv) $A' = \{0, 7, 8, -1, 3, 4, 10, 21, 6\}$, άρα

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{9}{14}.$$

ΘΕΜΑ 2_13152

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \Lambda = 2\alpha\beta, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(*Μονάδες 12*)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $K \geq \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \underbrace{2\alpha^2}_{\alpha^2+\alpha^2} + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2 + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}_{(\alpha+\beta)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha + \beta)^2 \geq 0,$$

ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

β) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha + \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{και} \\ 0 + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{και} \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 2_13153

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \kappa x - 2$, $\mu\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (*Μονάδες 10*)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$x^2 - 3x - 2 = 0 \quad (1)$:

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

(*Μονάδες 6*)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\Delta=(-\kappa)^2-4\cdot1\cdot(-2)=\kappa^2+8>0$

β) i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=3$ και $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-2.$

ii) Βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ρ_1 και ρ_2:

$S=\rho_1+\rho_2=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot3=6$

και $P=\rho_1\rho_2=2x_1\cdot2x_2=4x_1x_2=4\cdot(-2)=-8.$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής

$x^2-Sx+P=0\overset{S=6}{\underset{P=-8}{\Longleftrightarrow}}x^2-6x-8=0.$

4α ΘΕΜΑΤΑ

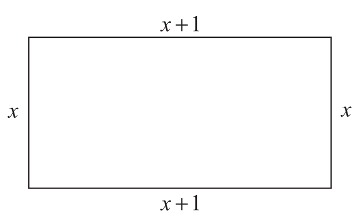
ΘΕΜΑ 4_13073

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (*Μονάδες 10*)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. (*Μονάδες 15*)

Λύση



α) Η περίμετρος του πατώματος είναι

$\Pi=2(x+1)+2x\Leftrightarrow\Pi=4x+2$ και το εμβαδόν

του $E=x(x+1)\Leftrightarrow E=x^2+x.$

β) Είναι $E=90\Leftrightarrow x^2+x=90\Leftrightarrow x^2+x-90=0.$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-90)=361>0$, άρα η εξίσωση $x^2+x-90=0$ έχει δύο ρίζες άνισες

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{-1\pm19}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+19}{2}=9,\ \text{δεκτή}\\ x_2=\dfrac{-1-19}{2}=-10,\ \text{απορρίπτεται,}\\ \qquad\qquad\text{αφού πρέπει } x>0\end{cases}.$$

Άρα οι διαστάσεις του πατώματος είναι $x=9$ και $x+1=10$ μέτρα.

ΘΕΜΑ 4_13078

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (*Μονάδες 5*)

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε αυτή να έχει μία διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. (*Μονάδες 10*)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Πρέπει $8-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=8.$

β) Για να είναι η εξίσωση 2ου βαθμού, πρέπει $\lambda\neq8$ και, για να έχει διπλή ρίζα, πρέπει

$\Delta=0\Leftrightarrow[-2(\lambda-2)]^2-4(8-\lambda)\cdot1=0\Leftrightarrow$

$4(\lambda-2)^2-32+4\lambda=0\Leftrightarrow$

$4(\lambda^2-4\lambda+4)-32+4\lambda=0\Leftrightarrow$

$4\lambda^2-16\lambda+16-32+4\lambda=0\Leftrightarrow$

$4\lambda^2-12\lambda-16=0\overset{\div4}{\Leftrightarrow}\lambda^2-3\lambda-4=0.$

$\Delta'=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25>0,$

άρα η Δ έχει δύο ρίζες άνισες

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\ \lambda_2=\dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}.$$

- Για $\lambda=4$ η εξίσωση γράφεται

$$4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

- Για $\lambda=-1$ η εξίσωση γράφεται

$$9x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow (3x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκαμε στο ερώτημα (β), το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο, άρα είναι μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

ΘΕΜΑ 4_13086

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (*Μονάδες 9*)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (*Μονάδες 6*)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\le 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=$

$=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\ge 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες ίσες, πρέπει

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm1.$$

γ) Πρέπει $\Delta\le 0$ και $\lambda<0$, άρα $\lambda=-1$.

ΘΕΜΑ 4_19364

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(\alpha-1)^2-16$. (*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (*Μονάδες 10*)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α. (*Μονάδες 2*)

ii) Να αποδείξετε ότι $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta=(\alpha+1)^2-4\cdot1\cdot(\alpha+4)=\alpha^2+2\alpha+1-4\alpha-16=$

$=\alpha^2-2\alpha+1-16=(\alpha-1)^2-16$

β) Πρέπει

$\Delta>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2-16>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2>16 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha-1)^2}>\sqrt{16} \Leftrightarrow |\alpha-1|>4 \Leftrightarrow$

$(\alpha-1<-4 \text{ ή } \alpha-1>4) \Leftrightarrow (\alpha<-3 \text{ ή } \alpha>5)$

γ) i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\alpha+1$ και

$P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=4+\alpha.$

ii) $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=|x_1-1|\cdot|x_2-1|=$

$=|(x_1-1)(x_2-1)|=|x_1x_2-x_1-x_2+1|=$

$=|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|=|P-S+1|=$

$=|\alpha+4-\alpha-1+1|=|4|=4$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_491

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3x-1<x+9 \text{ και } 2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (*Μονάδες 15*)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $3x-1<x+9 \Leftrightarrow 3x-x<9+1 \Leftrightarrow$

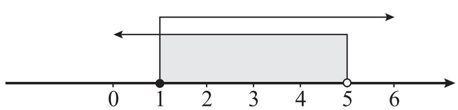
$2x<10 \Leftrightarrow x<\frac{10}{2} \Leftrightarrow x<5$ και

$2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{x}{2}-x\le\frac{1}{2}-2 \Leftrightarrow$

$-\frac{x}{2}-\frac{2x}{2}\le\frac{1}{2}-\frac{4}{2} \Leftrightarrow -\frac{3x}{2}\le-\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$x\ge-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x\ge1.$

β)



Το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το $[1, 5)$.

ΘΕΜΑ 2_1533

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (*Μονάδες 10*)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Για να έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες, θα πρέπει $\varDelta\ge0 \Leftrightarrow 2^2-4\cdot1\cdot(\lambda-2)\ge0 \Leftrightarrow$

$4-4\lambda+8\ge0 \Leftrightarrow 12\ge4\lambda \Leftrightarrow \lambda\le3.$

β) Έχουμε $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2}{1}=-2$ και

$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-2}{1}=\lambda-2$, άρα

$x_1x_2-2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow \lambda-2-2\cdot(-2)=1 \Leftrightarrow$

$\lambda-2+4=1 \Leftrightarrow \lambda=-1$, δεκτή λύση, αφού $-1<3$.

ΘΕΜΑ 2_4305

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\le5$ (*Μονάδες 9*)

ii) $|2x-3|\ge1$ (*Μονάδες 9*)

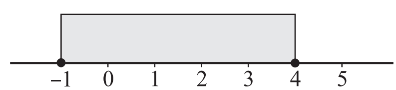
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) i) $|2x-3|\le5 \Leftrightarrow -5\le2x-3\le5 \Leftrightarrow$

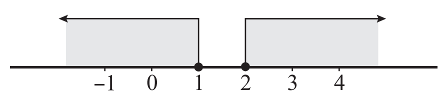
$-5+3\le2x-3+3\le5+3 \Leftrightarrow$

$-2\le2x\le8 \Leftrightarrow -1\le x\le4$



ii) $|2x-3|\ge1 \Leftrightarrow (2x-3\le-1 \text{ ή } 2x-3\ge1) \Leftrightarrow$

$(2x\le2 \text{ ή } 2x\ge4) \Leftrightarrow (x\le1 \text{ ή } x\ge2)$



β) Βρίσκοντας την τομή των δύο συνόλων λύσεων, προκύπτει ότι οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-1,1]\cup[2,4]$.

ΘΕΜΑ 2_7521

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και (*Μονάδες 9*)

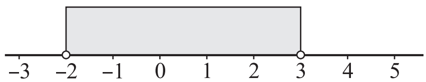
ii) $|1-2x|\ge1$ (*Μονάδες 9*)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) i) $|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow$

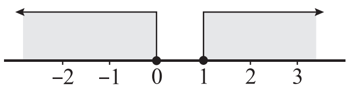
$-6<-2x<4 \Leftrightarrow 3>x>-2 \Leftrightarrow x\in(-2,\,3)$



ii) $|1-2x|\geq 1 \Leftrightarrow (1-2x\leq -1 \text{ ή } 1-2x\geq 1) \Leftrightarrow$

$(2\leq 2x \text{ ή } 0\geq 2x) \Leftrightarrow (x\geq 1 \text{ ή } x\leq 0) \Leftrightarrow$

$(-\infty,\,0]\cup[1,\,+\infty)$



β) Το σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων είναι το $(-2,\,0]\cup[1,\,3)$. Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων, δηλαδή οι $-1,\,0,\,1,\,2$.

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_2238

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (*Μονάδες 6*)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (*Μονάδες 6*)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,\,4)$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$\Delta=(-2\lambda)^2-4(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0$, άρα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2}=\frac{-(-2\lambda)\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\lambda\pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\lambda-1 \\ x_2=\lambda+1 \end{cases}.$$

γ) Πρέπει $\left.\begin{array}{c} -2<x_1<4 \\ \text{και} \\ -2<x_2<4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -2<\lambda-1<4 \\ \text{και} \\ -2<\lambda+1<4 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{c} -1<\lambda<5 \\ \text{και} \\ -3<\lambda<3 \end{array}\right\} \Rightarrow -1<\lambda<3. \text{ Άρα } \lambda\in(-1,\,3).$$

■

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_1067

Δίνεται η παράσταση $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (*Μονάδες 10*)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 7*)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ έχει

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm 5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3+5}{4}=\dfrac{8}{4}=2 \\ x_2=\dfrac{3-5}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Άρα το τριώνυμο γράφεται

$$2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1).$$

β) Η παράσταση ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι διαφορετικός του μηδενός, δηλαδή θα απορρίψουμε τις παραπάνω λύσεις του τριωνύμου, άρα $x \neq 2$ και $x \neq -\frac{1}{2}$.

γ) $K = \frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{x-2}{2x+1}$

ΘΕΜΑ 2_1097

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ. (*Μονάδες 12*)

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Αφού ο 1 είναι ρίζα του τριωνύμου, θα ισχύει $2\cdot 1^2+\lambda\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow 2+\lambda-5=0 \Leftrightarrow \lambda=3$.

β) Για $\lambda = 3$, το τριώνυμο γίνεται $2x^2+3x-5$ και έχει $\Delta = 3^2-4\cdot 2\cdot(-5) = 9+40 = 49$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm 7}{4} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Το τριώνυμο γράφεται

$$2x^2+3x-5 = 2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5).$$

ΘΕΜΑ 2_1281

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$. (*Μονάδες 12*)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 4\cdot(-1)\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3} =$

$= \sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$

β) $x_{1,2} = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\cdot(-1)} = \frac{-\sqrt{3}+1\pm\left(\sqrt{3}+1\right)}{-2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{-2} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Άρα $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3} = -(x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)$.

ΘΕΜΑ 2_1282

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$. (*Μονάδες 8*)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση $A(x) = \frac{x-1}{3x^2-2x-1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε. (*Μονάδες 9*)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $|A(x)| = 1$. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta = (-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1) = 4+12 = 16$ και

$$x_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 3} = \frac{2\pm 4}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Άρα}$$

$$3x^2-2x-1 = 3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right) = (x-1)(3x+1).$$

β) Πρέπει $3x^2-2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x\neq 1 \text{ και } x\neq -\frac{1}{3}\right)$.

Για $x \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$ έχουμε

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2-2x-1} = \frac{x-1}{(x-1)(3x+1)} \overset{x\neq 1}{=} \frac{1}{3x+1}.$$

γ) $|A(x)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3x+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|3x+1|} = 1 \Leftrightarrow$

$|3x+1| = 1 \Leftrightarrow (3x+1=1 \text{ ή } 3x+1=-1) \Leftrightarrow$

$(3x=0 \text{ ή } 3x=-2) \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ή } x=-\frac{2}{3}\right)$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_478

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ, ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές. (*Μονάδες 12*)

β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Η (1) έχει πραγματικές ρίζες όταν

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0.$

Η διακρίνουσα Δ' του τριωνύμου $-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$ είναι $\Delta' = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 64 > 0$, άρα το τριώνυμο $-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$ έχει δύο άνισες ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm 8}{-6} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου της $\Delta = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$ είναι:

λ	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\Delta = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες όταν $\lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα, για $\lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$ είναι $S = \lambda$ και $P = \lambda^2 + \lambda - 1$. Επομένως

$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda^2 + \lambda - 1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$-\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1$. Άρα $\lambda \in [-2, -1]$.

ΘΕΜΑ 2_484

α) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$ (*Μονάδες 16*)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) • $|2x - 5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow$ $1 \leq x \leq 4$

• Η διακρίνουσα του $2x^2 - x - 1$ είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$ και οι ρίζες του

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $2x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

β) Πρέπει $1 \leq x \leq 4$ και $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$, άρα $x \in [1, 4]$.

ΘΕΜΑ 2_490

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (*Μονάδες 10*)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (*Μονάδες 5*)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$ και οι ρίζες του

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

β) Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $2x^2-3x+1<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

γ) Είναι $1<3 \Leftrightarrow \sqrt{1}<\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$3<4 \Leftrightarrow \sqrt{3}<\sqrt{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{2}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}<1$. Άρα

$\frac{\sqrt{3}}{2}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης.

Αντίστοιχα, $0<1<\sqrt{2}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$. Άρα

$\frac{1}{\sqrt{2}}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 2_498

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$.

(*Μονάδες 9*)

β) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2+2x+3\le 0$.

(*Μονάδες 9*)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$15\cdot\frac{|x+1|}{3}-15\cdot\frac{|x+1|+4}{5}=15\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$5|x+1|-3(|x+1|+4)=10 \Leftrightarrow$

$5|x+1|-3|x+1|-12=10 \Leftrightarrow 2|x+1|=22 \Leftrightarrow$

$|x+1|=11 \Leftrightarrow (x+1=11 \text{ ή } x+1=-11) \Leftrightarrow$

$(x=10 \text{ ή } x=-12)$

β) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $-x^2+2x+3$ είναι $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=16$ και οι ρίζες του

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$.

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $-x^2+2x+3\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

γ) Είναι $10>3 \Leftrightarrow 10\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ και $-12<-1 \Leftrightarrow -12\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$, άρα οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 2_1277

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$-x^2+5x-6<0 \ (1) \text{ και } x^2-16\le 0 \ (2)$$

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(*Μονάδες 12*)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Για το τριώνυμο $-x^2+5x-6$ έχουμε

$\Delta=5^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)=25-24=1$ και

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\frac{-5\pm 1}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-5+1}{-2}=\frac{-4}{-2}=2 \\ x_2=\frac{-5-1}{-2}=\frac{-6}{-2}=3 \end{cases}$.

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα οι λύσεις της (1) είναι οι

$x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

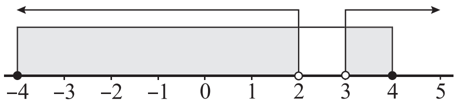
Για τη (2) έχουμε $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$.

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου x^2-16 είναι:

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα οι λύσεις της (2) είναι οι $x\in[-4,4]$.

β)



Οι κοινές λύσεις είναι οι $x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$.

ΘΕΜΑ 2_1278

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει $d(x, -2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$ (*Μονάδες 10*)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$ (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $d(x, -2) < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow$

$-1-2 < x+2-2 < 1-2 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

β) Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 3$ έχει

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases},$$

άρα ο πίνακας προσήμου του έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x^2 + 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι για $-3 < x < -1$ ισχύει $x^2 + 4x + 3 < 0$.

ΘΕΜΑ 2_1288

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$. (*Μονάδες 12*)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21|$.

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι $A = -x^2 + 11x - 24$. (*Μονάδες 8*)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - 10x + 21$ έχει

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10+4}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ x_2 = \dfrac{10-4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του $x^2 - 10x + 21$ είναι:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x \in (3, 7)$.

β) i) Για $x > 3 \Leftrightarrow x - 3 > 0$, άρα

$$A = \underbrace{|x-3|}_{(+)} + \underbrace{|x^2 - 10x + 21|}_{(-)} =$$

$$= x - 3 - x^2 + 10x - 21 = -x^2 + 11x - 24.$$

ii) $A = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 30 = 0$.

$\Delta = 11^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-30) = 121 - 120 = 1$ και

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-11+1}{-2} = \dfrac{-10}{-2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-11-1}{-2} = \dfrac{-12}{-2} = 6 \end{cases}$$

και οι δύο λύσεις είναι δεκτές, αφού ανήκουν στο διάστημα $(3, 7)$.

ΘΕΜΑ 2_1297

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ έχει

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$ και

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $3x^2-4x+1$ είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$.

β) Ισχύει $\alpha,\beta\in\left[\frac{1}{3},1\right]$, δηλαδή

$\frac{1}{3}\le\alpha\le1\Leftrightarrow3\cdot\frac{1}{3}\le3\alpha\le3\cdot1\Leftrightarrow1\le3\alpha\le3\ (1)$ και

$\frac{1}{3}\le\beta\le1\Leftrightarrow6\cdot\frac{1}{3}\le6\beta\le6\cdot1\Leftrightarrow2\le6\beta\le6\ (2)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$1+2\le3\alpha+6\beta\le3+6\ \Leftrightarrow3\le3\alpha+6\beta\le9\Leftrightarrow$

$\frac{3}{9}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le\frac{9}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le1,$

δηλαδή $\frac{3\alpha+6\beta}{9}\in\left[\frac{1}{3},1\right]$, επομένως είναι λύση της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 2_1512

α) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-x-2=0$. *(Μονάδες 8)*

β) Να λυθεί η ανίσωση $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. *(Μονάδες 12)*

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 5)*

Λύση

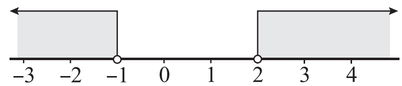
α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$ και

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{1\pm3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}.$$

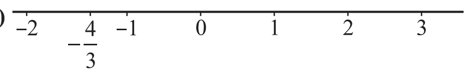
β) Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου x^2-x-2 έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2-x-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.



γ)



Παρατηρούμε ότι $-\frac{4}{3}\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$, άρα το $-\frac{4}{3}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

ΘΕΜΑ 2_3380

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. *(Μονάδες 13)*

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 12)*

Λύση

α) $f(x)\le0\Leftrightarrow3x^2+9x-12\le0$.

Το τριώνυμο $3x^2+9x-12$ έχει

$\Delta=9^2-4\cdot3\cdot(-12)=81+144=225$ και ρίζες

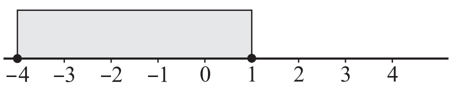
$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{2\cdot3}=\frac{-9\pm15}{6}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{-9+15}{6}=\frac{6}{6}=1\\ x_2=\frac{-9-15}{6}=\frac{-24}{6}=-4\end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $3x^2+9x-12$ έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2+9x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)\le 0$ είναι οι $x\in[-4,1]$.



β) Πρέπει $\sqrt[3]{2}\in[-4,1]\Leftrightarrow -4\le\sqrt[3]{2}\le 1\Leftrightarrow$ $\left(-4\le\sqrt[3]{2}\text{ και }\sqrt[3]{2}\le 1\right)$. Η σχέση $-4\le\sqrt[3]{2}$ ισχύει, αφού ο $\sqrt[3]{2}$ είναι θετικός, αλλά $\sqrt[3]{2}\le 1\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\le 1^3\Leftrightarrow 2\le 1$, άτοπο, άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α).

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_1874

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0\ (1)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$. *(Μονάδες 7)*

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. *(Μονάδες 10)*

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$. *(Μονάδες 8)*

Λύση

α) $\Delta=\left[-2(\lambda-1)\right]^2-4(\lambda+5)=4(\lambda-1)^2-4\lambda-20=$
$=4(\lambda^2-2\lambda+1)-4\lambda-20=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=$
$=4\lambda^2-12\lambda-16$

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-16>0\Leftrightarrow$
$\lambda^2-3\lambda-4>0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda+\lambda-4>0\Leftrightarrow$
$\lambda(\lambda-4)+(\lambda-4)>0\Leftrightarrow(\lambda-4)(\lambda+1)>0.$

Το τριώνυμο $\lambda^2-3\lambda-4$ θέλουμε να είναι ομόσημο του $\alpha=1>0$, άρα θα πρέπει ο λ να παίρνει τιμές εκτός των ριζών 4 και -1 του τριωνύμου.

Τελικά, $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.

γ) Έχουμε $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-2(\lambda-1)}{1}=2(\lambda-1)$

και $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda+5$. Άρα

$d(x_1,x_2)=\sqrt{24}\Leftrightarrow|x_1-x_2|=\sqrt{24}\Leftrightarrow$

$|x_1-x_2|^2=\sqrt{24}^2\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=24\Leftrightarrow$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=24\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=24\Leftrightarrow$

$4(\lambda-1)^2-4(\lambda+5)=24\Leftrightarrow$

$4(\lambda^2-2\lambda+1)-4\lambda-20=24\Leftrightarrow$

$4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20-24=0\Leftrightarrow$

$4\lambda^2-12\lambda-40=0\Leftrightarrow\lambda^2-3\lambda-10=0.$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-10)=9+40=49>0$, οπότε

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm7}{2}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3+7}{2}=\dfrac{10}{2}=5\\[2mm]\lambda_2=\dfrac{3-7}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$. Οι τιμές $\lambda=5$ και $\lambda=-2$ ανήκουν στο $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$, άρα είναι και οι δύο δεκτές.

ΘΕΜΑ 4_2244

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\le 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. *(Μονάδες 10)*

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$. *(Μονάδες 5)*

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) Ισχύει $\left|x-2\right|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow$

$-3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow -1<x<5$.

Επίσης, το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει διακρίνουσα $\Delta=\left(-2\right)^2-4\cdot\left(-8\right)=4+32=36>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\left(-2\right)\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

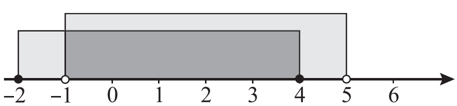
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2-6}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{2+6}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του x^2-2x-8 είναι:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2,4\right]$.

β) Για να συναληθεύουν οι ανισώσεις, πρέπει $x\in\left(-1,5\right)$ και $x\in\left[-2,4\right]$:



Άρα $x\in\left(-1,4\right]$.

γ) Ισχύει $\left.\begin{matrix} -1<\rho_1\le 4 \\ -1<\rho_2\le 4 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -2<\rho_1+\rho_2\le 8 \overset{\cdot\frac{1}{2}>0}{\Longrightarrow}$

$$-2\cdot\frac{1}{2}<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow -1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 4,$$ άρα

ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ ανήκει στο σύνολο των κοινών λύσεων.

ΘΕΜΑ 4_2255

Δίνονται οι ανισώσεις $2\le\left|x\right|\le 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. *(Μονάδες 10)*

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in\left[2,3\right]$. *(Μονάδες 5)*

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) Ισχύει $\left|x\right|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$ και

$2\le\left|x\right| \Leftrightarrow \left(x\le -2 \text{ ή } x\ge 2\right)$.

Συναληθεύοντας έχουμε $2\le\left|x\right|\le 3 \Leftrightarrow$ $\left(-3\le x\le -2 \text{ ή } 2\le x\le 3\right)$. Επίσης,

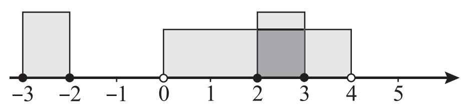
$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x\left(x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ή } x=4\right)$.

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου x^2-4x είναι:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2-4x<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,4\right)$.

β) Για να συναληθεύουν οι ανισώσεις, πρέπει $x\in\left(0,4\right)$ και $x\in\left[-3,-2\right]\cup\left[2,3\right]$:



Άρα $x\in\left[2,3\right]$.

γ) Ισχύει $\left.\begin{matrix} 2\le\rho_1\le 3 \\ 2\le\rho_2\le 3 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 4\le\rho_1+\rho_2\le 6 \overset{\cdot\frac{1}{2}>0}{\Longrightarrow}$

$$4\cdot\frac{1}{2}\le\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 6\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 2\le\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 3.$$

Άρα ο $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ ανήκει στο σύνολο των κοινών λύσεων.

ΘΕΜΑ 4_2273

Δίνονται οι ανισώσεις $\left|x+1\right|\le 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. *(Μονάδες 10)*

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in\left[-3,1\right)$. *(Μονάδες 5)*

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1-\rho_2\in\left(-2,2\right)$. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) Ισχύει $\left|x+1\right|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow$

$-2-1 \le x \le 2-1 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$. Επίσης, το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-1)^2-4\cdot(-2)=1+8=9>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

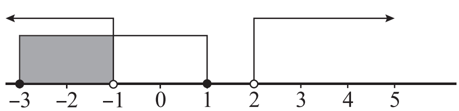
$$\begin{cases} x_1=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \\ x_2=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2 \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου x^2-x-2 είναι:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2-x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

β) Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,1]$ και $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$:



Άρα $x\in[-3,-1)$.

γ) Ισχύει $\left.\begin{matrix} -3\le \rho_1<-1 \\ -3\le \rho_2<-1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\cdot(-1)<0]{} \left.\begin{matrix} -3\le \rho_1<-1 \\ 1<-\rho_2\le 3 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$-3+1<\rho_1-\rho_2<-1+3 \Rightarrow -2<\rho_1-\rho_2<2 \Rightarrow$

$\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

ΘΕΜΑ 4_2336

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$. (*Μονάδες 10*)

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0 \quad (1)$ με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (*Μονάδες 10*)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$ και

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2 \end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου x^2-5x+6 έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι

$x^2-5x+6>0$ για $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$,

$x^2-5x+6<0$ για $x\in(2,3)$ και $x^2-5x+6=0$ για $x\in\{2,3\}$.

β) i) Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες όταν

$$\Delta>0\Leftrightarrow(2-\lambda)^2-4\cdot\frac{1}{4}(\lambda-2)>0\Leftrightarrow$$

$$4-4\lambda+\lambda^2-\lambda+2>0\Leftrightarrow\lambda^2-5\lambda+6>0.$$

Από το ερώτημα (α) προκύπτει

$\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

ii) Πρέπει

$$P>0\Leftrightarrow\frac{\lambda-2}{\frac{1}{4}}>0\Leftrightarrow4(\lambda-2)>0\Leftrightarrow\lambda>2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα (βi), προκύπτει $\lambda\in(3,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_4542

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (*Μονάδες 8*)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (*Μονάδες 10*)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$$ (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$. Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$, οπότε ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $x^2 - x$ έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x \in (0, 1)$.

β) i) Αφού $0 < \alpha < 1$, σύμφωνα με το ερώτημα (α) έχουμε $0 < \alpha^2 < \alpha \Leftrightarrow \sqrt{0} < \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \sqrt{\alpha}$ και $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{0} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{1} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\alpha} < 1$, άρα έχουμε $0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$.

$0 \quad \alpha^2 \quad \alpha \quad \sqrt{\alpha} \quad\quad 1$

ii) Οι όροι της ανισότητας είναι θετικοί, οπότε υψώνοντας στο τετράγωνο δε θα αλλάξει η φορά, άρα

$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\alpha}\right)^2 < \left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}^2 \overset{\sqrt{\alpha}^2 = \alpha}{\underset{\alpha > 0}{\Longleftrightarrow}} 0 < 2\sqrt{\alpha},$$ που ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

ΘΕΜΑ 4_4548

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Μονάδες 10*)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (*Μονάδες 6*)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ίσες, πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$.

γ) Για να έχει νόημα η παράσταση A, πρέπει $S - P > 0$ με $S = -\dfrac{-1}{1} = 1$ και $P = \dfrac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$.

Επομένως
$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0$.

Έχουμε $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ είναι παντού ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$, δηλαδή θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό λ, επομένως η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4_4607

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (*Μονάδες 8*)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (*Μονάδες 10*)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς:

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$$ (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$. Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$ και κάνοντας τον πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

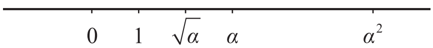
προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

β) **i)** Αφού $\alpha > 1$, σύμφωνα με το ερώτημα (α)

έχουμε $\alpha^2 > \alpha \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha^2} > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha > \sqrt{\alpha}$ και

$\alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > \sqrt{1} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > 1$, άρα έχουμε

$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$.



ii) Από υπόθεση ξέρουμε ότι $\alpha > 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 > \alpha$.

Συγκρίνουμε τους αριθμούς α και $\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$

βρίσκοντας τη διαφορά τους:

$\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} - \alpha = \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} - \dfrac{2\alpha}{2} = \dfrac{\alpha^2-\alpha}{2} > 0$,

άρα $\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} > \alpha$. Συγκρίνουμε και τους αριθμούς

α^2 και $\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$ βρίσκοντας τη διαφορά τους:

$\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} - \alpha^2 = \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} - \dfrac{2\alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha-\alpha^2}{2} < 0$, άρα

$\alpha^2 > \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$. Τελικά, $\alpha < \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} < \alpha^2$.

Άλλος τρόπος

Ο $\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$ είναι αριθμητικός μέσος των α και

α^2, άρα ισχύει $\alpha < \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2} < \alpha^2$ με $\alpha > 1$.

ΘΕΜΑ 4_4663

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ (*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (*Μονάδες 10*)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες:

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση

$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x - 4\lambda x + 3\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + \left[-4(1+\lambda)\right]x + (3\lambda+4) = 0$

β) $\Delta = 16(1+\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(3\lambda+4) =$

$= 16(1+2\lambda+\lambda^2) - 12\lambda - 16 =$

$= 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 16\lambda^2 + 20\lambda$.

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0$ (1).

Για την (1) έχουμε

$16\lambda^2 + 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 4\lambda(4\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -\dfrac{5}{4}\right)$. Πρέπει $16\lambda^2 + 20\lambda > 0$,

δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 16 > 0$, άρα

$\lambda \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{4}\right) \cup (0, +\infty)$, δηλαδή εκτός των

ριζών του $16\lambda^2 + 20\lambda$.

γ) **i)** $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 4(1+\lambda)$ και

$P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = 3\lambda + 4$.

ii) $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) =$

$= 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =$

$= 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$

$= 16(3\lambda+4) - 48(1+\lambda) + 9 =$

$= 48\lambda + 64 - 48 - 48\lambda + 9 = 25$, σταθερή.

ΘΕΜΑ 4_4836

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (*Μονάδες 8*)

β) Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (*Μονάδες 5*)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$ και, αφού εκτός των ριζών το τριώνυμο $\lambda^2 - 4$ παίρνει τιμές ομόσημες του $\alpha = 1 > 0$, προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

β) Ο ρ επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \overset{x=\rho}{\Longleftrightarrow} \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \ (2) \text{ και}$$

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \underset{\rho\neq 0}{\overset{x=\frac{1}{\rho}}{\Longleftrightarrow}} \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \lambda\left(\frac{1}{\rho}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^2\frac{1}{\rho^2} - \rho^2\frac{\lambda}{\rho} + \rho^2\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0$, που ισχύει από τη σχέση (2),

άρα ο $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (1).

γ) i) Για $\lambda > 2$ έχουμε $P = x_1x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = 1 > 0$, άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι ομόσημοι αριθμοί. Όμως $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda > 0$ (αφού $\lambda > 2$), άρα οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) Από το ερώτημα (β) οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφοι αριθμοί, άρα $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$. Επομένως

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow x_1 + 4\frac{1}{x_1} \geq 4 \overset{x_1>0}{\Longleftrightarrow} x_1^2 + 4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow$$

$x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0$, που ισχύει.

ΘΕΜΑ 4_4853

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. *(Μονάδες 9)*

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$, *(Μονάδες 9)*

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$. *(Μονάδες 7)*

Λύση

α) Αφού η εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, από τους τύπους Vietta έχουμε

$$S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 1 + 2 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$$

και $P = x_1x_2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} = 1\cdot 2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha$.

β) i) Ξέρουμε ότι ένα τριώνυμο μεταξύ των ριζών του έχει πρόσημο ετερόσημο του α. Αφού το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$ (δηλαδή μεταξύ των ριζών του 1 και 2), προκύπτει $\alpha < 0$.

ii) $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \underset{\beta=-3\alpha}{\overset{\gamma=2\alpha}{\Longleftrightarrow}} 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \overset{\div\alpha<0}{\Longleftrightarrow}$

$2x^2 - 3x + 1 > 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Θέλουμε το τριώνυμο να είναι θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 2$, άρα θα πρέπει ο x να βρίσκεται εκτός των ριζών. Τελικά,

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 4_4859

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. *(Μονάδες 10)*

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 5)*

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot \beta\cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) $\Delta=\kappa^2-4\cdot 3\cdot(-4)=\kappa^2+48>0,$ ως άθροισμα μη αρνητικών και θετικών όρων, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-\dfrac{4}{3}<0,$ άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

γ) Έχουμε $x_1<x_2$ και x_1, x_2 ετερόσημες, άρα $x_1<0<x_2$ και $\alpha<x_1<0<x_2<\beta$.
Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $f(x)=3x^2+\kappa x-4$ έχει τη μορφή:

x	$-\infty$	α		x_1		x_2		β	$+\infty$
$f(x)$			+	0	−	0	+		

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0,$ άρα $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)<0.$

ΘΕΜΑ 4_5285

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2-3x+2=0\ (1)\quad \text{και}\quad x^4-3x^2+2=0\ (2)$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(*Μονάδες 10*)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και, επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x να έχει θετική τιμή. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0,$ άρα

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm] x_2=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}.$$

β) $x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left(x^2\right)^2-3x^2+2=0\overset{x^2=\omega}{\Longleftrightarrow}$ $\omega^2-3\omega+2=0.$ Από το ερώτημα (α), $\omega=1$ ή $\omega=2.$

- Για $\omega=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow(x=1$ ή $x=-1).$
- Για $\omega=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow\left(x=\sqrt{2}\right.$ ή $\left.x=-\sqrt{2}\right).$

γ) Αφού ο συντελεστής του x^2 στο τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ είναι θετικός (ίσος με 1), τότε, αν η μία ρίζα του τριωνύμου είναι ο $-\sqrt{2}$ ή ο -1, οποιαδήποτε και να είναι η άλλη ρίζα, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου θα έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		+	0	−	0	+	

ή

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		x_2		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		+	0	−	0	+	

ή

x	$-\infty$		-1		x_2		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		+	0	−	0	+	

Άτοπο, αφού στις περιπτώσεις αυτές το τριώνυμο δεν έχει θετική τιμή για κάθε αρνητικό αριθμό. Επομένως οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και $\sqrt{2},$ άρα

$\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=x^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{2}=$

$=x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2},$ όπου $\beta=-\left(1+\sqrt{2}\right),\ \gamma=\sqrt{2}.$

Ισχύει ότι $x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right).$

ΘΕΜΑ 4_5316

Δίνεται το τριώνυμο $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(*Μονάδες 4*)

β) **i)** Αν $\beta\neq 0,$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (*Μονάδες 7*)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$; (*Μονάδες 6*)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής σας στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta=\beta^2-4\beta^2=-3\beta^2$

β) **i)** Αν $\beta\neq 0$, τότε $\Delta<0$, άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή θετικό.

ii) Αν $\beta=0\Rightarrow x^2+\beta x+\beta^2=x^2\geq 0$, άρα το τριώνυμο είναι θετικό για $x\in\mathbb{R}^*$ και ίσο με το 0 για $x=0$.

γ) Για $\beta=0$ και $x=0$ είναι $x^2+\beta x+\beta^2=0$ και σε κάθε άλλη περίπτωση το τριώνυμο $x^2+\beta x+\beta^2$ είναι θετικό. Άρα, αν $x=\alpha$, τότε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ αν οι α,β δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν.

ΘΕΜΑ 4_5322

Δίνεται το τριώνυμο x^2-2x-8.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(*Μονάδες 10*)

β) Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(*Μονάδες 8*)

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης $\mu^2-2|\mu|-8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=36>0$, επομένως

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2+6}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \\ x_2=\dfrac{2-6}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}.$$

Για $x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$ έχουμε $x^2-2x-8>0$, για $x\in(-2,4)$ έχουμε $x^2-2x-8<0$ και για $x\in\{-2,4\}$ έχουμε $x^2-2x-8=0$.

β) Ισχύει ότι $2=\dfrac{8888}{4444}<\dfrac{8889}{4444}\Rightarrow 2<\dfrac{8889}{4444}\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$

$$-2>-\frac{8889}{4444}\Leftrightarrow -2>\kappa.$$

Άρα $\kappa\in(-\infty,-2)$ και συνεπώς $\kappa^2-2\kappa-8>0$.

γ) Έχουμε $-4<\mu<4\Leftrightarrow|\mu|<4$. Επίσης, $|\mu|\geq 0$, άρα $|\mu|\in[0,4)\subseteq(-2,4)$. Από την απάντηση στο ερώτημα (α) η παράσταση $\mu^2-2|\mu|-8=|\mu|^2-2|\mu|-8$ είναι αρνητική.

ΘΕΜΑ 4_5884

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(*Μονάδες 7*)

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (*Μονάδες 6*)

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-3)=36-4\lambda+12=48-4\lambda$

β) Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow 48-4\lambda>0\Leftrightarrow 4\lambda<48\Leftrightarrow\lambda<12$.

γ) **i)** Αφού $\lambda<12$, από το ερώτημα (β) το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Το γινόμενο των ριζών είναι $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda-3>0$, αφού $\lambda>3$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες, ή και οι δύο αρνητικές ή και οι δύο θετικές. Όμως το άθροισμα των ριζών είναι $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=6>0$, άρα οι ρίζες είναι θετικές.

ii) $\alpha = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ και αρνητικό για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Επίσης:

- $(\kappa < 0 \text{ και } 0 < x_1) \Rightarrow \kappa < x_1 \Rightarrow f(\kappa) > 0$
- $x_1 < \mu < x_2 \Rightarrow f(\mu) < 0$
- $(x_1 > 0 \text{ και } \mu > x_1) \Rightarrow \mu > 0$
- $\kappa < 0$

Άρα $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$.

ΘΕΜΑ 4_5885

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου:

$$x^2 + 9x + 18$$ (*Μονάδες 4*)

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$$ (*Μονάδες 7*)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (*Μονάδες 7*)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$$ (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) i) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-9+3}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-9-3}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases}.$$

ii) $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0 \Rightarrow$

$(x + 3 = 0 \text{ και } x^2 + 9x + 18 = 0) \Rightarrow$

$\{x = -3 \text{ και } (x = -6 \text{ ή } x = -3)\} \Rightarrow x = -3$

β) i) $\alpha = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty)$, αρνητικό για κάθε $x \in (-6, -3)$ και ίσο με το μηδέν για $x \in \{-6, -3\}$.

ii) $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \Leftrightarrow$

$x^2 + 9x + 18 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-6, -3]$

ΘΕΜΑ 4_6224

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0,\ \lambda \in (0, 4)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (*Μονάδες 6*)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (*Μονάδες 6*)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \ge 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$. (*Μονάδες 7*)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (*Μονάδες 6*)

Λύση

Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 4\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right) > 0$ για $\lambda \in (0, 4)$ και το γινόμενό τους είναι $P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = 16$.

α) i) Αν x_1, x_2 είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε

$$\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right).$$

ii) $E = x_1 x_2 = P = 16$

β) $\Pi \ge 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right) \ge 16 \Leftrightarrow \lambda + \dfrac{1}{\lambda} \ge 2 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}$

$\lambda^2 + 1 \ge 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \ge 0$,

που ισχύει.

γ) $\Pi = 16 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Τότε η αρχική εξίσωση είναι η

$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, διπλή ρίζα. Άρα $x_1 = x_2 = 4$, δηλαδή το σχήμα είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4_6226

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0,\ \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (*Μονάδες 6*)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (*Μονάδες 6*)

β) Να αποδείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (*Μονάδες 7*)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (*Μονάδες 6*)

Λύση

Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι αντίστοιχα

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 2$ και $P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lambda(2-\lambda)$.

α) i) $\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2 \cdot 2 = 4$

ii) $E = x_1 x_2 = P = \lambda(2-\lambda)$

β) $E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \le 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \le 1 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \ge 0$,

που ισχύει.

γ) Αν $E = 1 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε η αρχική εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1\cdot(2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Αφού η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες και άρα είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4_6227

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$. (*Μονάδες 10*)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$K = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5\cdot\dfrac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας. (*Μονάδες 7*)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 49 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5+7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\ x_2 = \dfrac{5-7}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}.$$

Για κάθε $x \in (-1, 6)$ το τριώνυμο είναι ετερόσημο του $\alpha = 1 > 0$, άρα $x^2 - 5x - 6 < 0$ για κάθε $x \in (-1, 6)$.

β) $\dfrac{46}{47} < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{46}{47} > -1$ και $-\dfrac{46}{47} < 0$. Άρα

$-1 < -\dfrac{46}{47} < 0$ και από το ερώτημα (α) για $x = -\dfrac{46}{47}$

προκύπτει ότι $\left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 - 5\cdot\left(-\dfrac{46}{47}\right) - 6 < 0 \Leftrightarrow$

$\left(-\dfrac{46}{7}\right)^2 + 5\cdot\dfrac{46}{47} - 6 < 0 \Leftrightarrow K < 0$.

γ) $-6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow |\alpha| < 6$ και $|\alpha| \ge 0$. Άρα

$|\alpha| \in [0, 6) \subseteq (-1, 6)$. Από το ερώτημα (α) και για $x = |\alpha|$ προκύπτει ότι

$|\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \overset{|\alpha|^2 = \alpha^2}{\Longleftrightarrow} \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \Lambda < 0$.

ΘΕΜΑ 4_7677

Δίνεται η ανίσωση $|x+1| < 4 \quad (1)$.

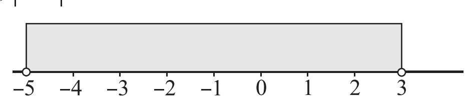
α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (*Μονάδες 7*)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (*Μονάδες 3*)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή για κάθε $x \le 0$. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $|x+1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+1 < 4 \Leftrightarrow -5 < x < 3$



β) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$

γ) Το ζητούμενο τριώνυμο έχει $\alpha = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών του. Επομένως, για να έχει θετική τιμή για κάθε $x \leq 0$, πρέπει η μικρότερή του ρίζα να είναι θετική, δηλαδή και οι δύο να είναι θετικές, άρα οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί 1 και 2. Συνεπώς

$(x-1)(x-2) = x^2 - x - 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$,

δηλαδή $\beta = -3$, $\gamma = 2$.

Πράγματι, το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ είναι θετικό για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_7684

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \leq 3 \ (1)$.

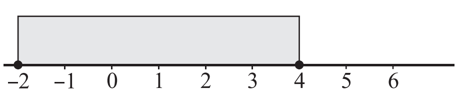
α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (*Μονάδες 7*)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (*Μονάδες 3*)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή για κάθε $x \geq 0$. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$



β) $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

γ) Το ζητούμενο τριώνυμο έχει $\alpha = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών του. Επομένως, για να έχει θετική τιμή για κάθε $x \geq 0$, πρέπει η μεγαλύτερή του ρίζα να είναι αρνητική, δηλαδή και οι δύο να είναι αρνητικές, άρα οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί -1 και -2. Συνεπώς

$(x+1)(x+2) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$,

δηλαδή $\beta = 3$, $\gamma = 2$.

Πράγματι, το τριώνυμο $x^2 + 3x + 2$ είναι θετικό για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_7745

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x. (*Μονάδες 10*)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002)$$ (*Μονάδες 7*)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$ (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{cases}.$$

Έχουμε $\alpha = -1 < 0$, άρα για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ το $f(x)$ είναι αρνητικό, για κάθε $x \in (-1, 3)$ το $f(x)$ είναι θετικό και για $x \in \{-1, 3\}$ το $f(x)$ είναι ίσο με μηδέν.

β) Ισχύει $-1 < 2{,}999 < 3$ και $-1{,}002 < -1$.

Σύμφωνα με την απάντηση στο ερώτημα (α), $f(2{,}999) > 0$ και $f(-1{,}002) < 0$. Επομένως $f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002) < 0$.

γ) $-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3$ και $|\alpha| \geq 0$.

Άρα $|\alpha| \in [0, 3) \subseteq (-1, 3)$. Από την απάντηση στο ερώτημα (α), για $x = |\alpha|$ έχουμε ότι

$f(|\alpha|) = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$.

ΘΕΜΑ 4_7958

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \ (1)$. (*Μονάδες 10*)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

(*Μονάδες 8*)

ii) Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $x^2+1\geq\frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0$.

Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2\\ x_1=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Επίσης, $\alpha=2>0$, άρα η (1) είναι αληθής για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

β) i) $(\lambda-1)(\kappa-1)<0\Leftrightarrow$ οι αριθμοί $\lambda-1$, $\kappa-1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda-1<0<\kappa-1\overset{+1}{\Leftrightarrow}\lambda<1<\kappa$.
- Αν $\kappa-1<0<\lambda-1\overset{+1}{\Leftrightarrow}\kappa<1<\lambda$.

Άρα σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

ii) Αφού οι αριθμοί κ, λ είναι λύσεις της (1), θα ισχύει ότι $\lambda,\kappa\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$. Επίσης, από το (i), δεν μπορεί τα κ, λ να βρίσκονται και τα δύο στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ ή στο $[2,+\infty)$, γιατί τότε το 1 δε θα βρισκόταν μεταξύ τους, άρα ο ένας από τους δύο αριθμούς ανήκει στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και ο άλλος στο $[2,+\infty)$. Η απόσταση των κ, λ είναι μεγαλύτερη ή ίση με την απόσταση των $\frac{1}{2}$, 2, άρα $|\kappa-\lambda|\geq\left|2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 4_7974

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha-2|<1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α. (*Μονάδες 8*)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο:

$$x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. (*Μονάδες 10*)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $|\alpha-2|<1\Leftrightarrow -1<\alpha-2<1\Leftrightarrow 1<\alpha<3$,

άρα $\alpha\in(1,3)$.

β) i) $\Delta=[-(\alpha-2)]^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=$

$=(\alpha-2)^2-1=|\alpha-2|^2-1$.

Όμως $|\alpha-2|<1\overset{\text{θετικοί}}{\Longleftrightarrow}|\alpha-2|^2<1^2\Leftrightarrow$

$|\alpha-2|^2-1<0\Leftrightarrow\Delta<0$.

ii) Από το (i), το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, ομόσημο του 1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

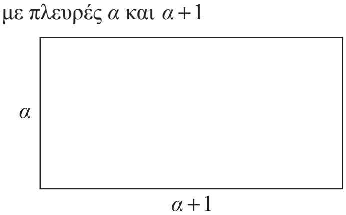
ΘΕΜΑ 4_8217

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

(*Μονάδες 8*)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$. (*Μονάδες 5*)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha+1$



όπου ο αριθμός $α$ ικανοποιεί τη σχέση $\left|α-\frac{1}{2}\right|>1.$

Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E<6,$ τότε:

i) Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<α<2.$ (*Μονάδες 7*)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει

$Δ=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases}.$$

Επειδή $α=1>0,$ θα ισχύει $x^2+x-6<0$ για κάθε $x\in(-3,\,2).$

β) $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}>1 \text{ ή } x-\frac{1}{2}<-1\right)\Leftrightarrow$

$\left(x>\frac{3}{2} \text{ ή } x<-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\,+\infty\right)$

γ) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$E=α(α+1)=α^2+α,$ άρα

$E<6\Leftrightarrow α^2+α<6\Leftrightarrow α^2+α-6<0\Leftrightarrow$

$α\in(-3,\,2)$ και

$\left|α-\frac{1}{2}\right|>1\Leftrightarrow α\in\left(-\infty,\,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\,+\infty\right).$

Αν επίσης λάβουμε υπόψη μας ότι $α>0$ ως μήκος πλευράς, τότε $α\in\left(\frac{3}{2},\,2\right),$ δηλαδή $\frac{3}{2}<α<2.$

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$2α+2(α+1)=4α+2.$ Ισχύει

$\frac{3}{2}<α<2\overset{\cdot 4>0}{\Longleftrightarrow}6<4α<8\Leftrightarrow 8<4α+2<10.$

Τελικά, η περίμετρος του ορθογωνίου κυμαίνεται μεταξύ των αριθμών 8 και 10.

ΘΕΜΑ 4_8445

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}.$ Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. (*Μονάδες 10*)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς $α,\,β$ διαφορετικούς από το 0 με $α<β$ για τους οποίους ισχύει $(α^2-3α+2)(β^2-3β+2)<0.$ Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(α-1)(β-2)|=(α-1)(β-2).$

(*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει

$Δ=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}.$$

Αφού $α=1>0,$ για κάθε $x\in(-\infty,\,1)\cup(2,\,+\infty)$ ισχύει $x^2-3x+2>0,$ για κάθε $x\in(1,\,2)$ ισχύει $x^2-3x+2<0$ και για $x\in\{1,\,2\}$ ισχύει $x^2-3x+2=0.$

β) Οι αριθμοί $α^2-3α+2$ και $β^2-3β+2$ είναι ετερόσημοι. Άρα από την απάντηση στο ερώτημα (α) ένας από τους $α,\,β$ θα ανήκει στο $(-\infty,\,1)\cup(2,\,+\infty)$ και ο άλλος στο $(1,\,2).$

- Αν $α\in(-\infty,\,1)\cup(2,\,+\infty),$ τότε $β\in(1,\,2)$ και, επειδή $α<β,$ θα είναι υποχρεωτικά $α<1,$ δηλαδή $α-1<0.$ Επίσης, $β<2\Leftrightarrow β-2<0.$ Άρα $(α-1)(β-2)>0,$ επομένως $|(α-1)(β-2)|=(α-1)(β-2).$
- Αν $α\in(1,\,2),$ τότε $β\in(-\infty,\,1)\cup(2,+\infty)$ και υποχρεωτικά $β\in(2,\,+\infty),$ αφού $α<β.$ Επομένως $α>1\Leftrightarrow α-1>0$ και $β>2\Leftrightarrow β-2>0.$ Άρα $(α-1)(β-2)>0,$ οπότε $|(α-1)(β-2)|=(α-1)(β-2).$

Σε κάθε περίπτωση

$|(α-1)(β-2)|=(α-1)(β-2).$

ΘΕΜΑ 4_8455

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$. (*Μονάδες 5*)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$. (*Μονάδες 10*)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$$

έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $|1-3\alpha|<2 \Leftrightarrow -2<1-3\alpha<2 \Leftrightarrow$

$-2-1<-3\alpha<2-1 \Leftrightarrow -3<-3\alpha<1 \Leftrightarrow$

$1>\alpha>-\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<\alpha<1$

β) Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1, άρα

$|\beta-2|<1 \Leftrightarrow -1<\beta-2<1 \Leftrightarrow$

$-1+2<\beta<1+2 \Leftrightarrow 1<\beta<3 \quad (1)$.

Έχουμε $-\frac{1}{3}<\alpha<1 \overset{\cdot(-3)<0}{\Longleftrightarrow} -3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)>-3\alpha>-3 \Leftrightarrow$

$-3<-3\alpha<1 \quad (2)$.

$(1)+(2) \Rightarrow 1-3<\beta-3\alpha<3+1 \Rightarrow$

$-2<\beta-3\alpha<4 \Rightarrow -2-1<\beta-3\alpha-1<4-1 \Rightarrow$

$-3<\beta-3\alpha-1<3 \Rightarrow |\beta-3\alpha-1|<3$

γ) Για να ορίζεται η f, πρέπει $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2 \geq 0$. Έχουμε

$\Delta=[-4(\beta-2)]^2-4\cdot4\cdot\beta^2=16(\beta-2)^2-16\beta^2=$

$=16(\beta^2-4\beta+4)-16\beta^2=16\beta^2-64\beta+64-16\beta^2=$

$=64-64\beta=64(1-\beta)<0$, από (1). Άρα το τριώνυμο $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2$ είναι παντού ομόσημο του $\alpha=4>0$, οπότε θετικό. Επομένως η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 4_13102

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, αν $\lambda=5$, η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (*Μονάδες 5*)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (*Μονάδες 5*)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (*Μονάδες 10*)

δ) Αν $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5$, $\lambda \in \mathbb{R}-\{-1,5\}$, να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Για $\lambda=5$, η εξίσωση γράφεται $x^2-10x+25=0$, με $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot25=100-100=0$, άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

β) $\Delta=0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2-4(4\lambda+5)=0 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2-16\lambda-20=0 \overset{\div4}{\Leftrightarrow} \lambda^2-4\lambda-5=0$.

$\Delta'=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36>0$, άρα η εξίσωση $\lambda^2-4\lambda-5=0$ έχει δύο ρίζες άνισες

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5 \\ \lambda_2=\frac{4-6}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \end{cases},$$

δηλαδή η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ έχει διπλή ρίζα για $\lambda=5$ και για $\lambda=-1$.

γ) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες άνισες, θα πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-5>0$, δηλαδή το τριώνυμο $\lambda^2-4\lambda-5$ θα πρέπει να είναι ομόσημο του $\alpha=1>0$, επομένως θα πρέπει ο λ να παίρνει τιμές εκτός των ριζών -1 και 5 του τριωνύμου. Τελικά, $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

δ) Έχουμε $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5 \Leftrightarrow$

$|\lambda^2-4\lambda-5|=-(\lambda^2-4\lambda-5) \quad (1)$. Από την ιδιότητα των απόλυτων τιμών $|\alpha|=-\alpha \Leftrightarrow \alpha\leq0$ η σχέση (1) ισχύει όταν $\lambda^2-4\lambda-5\leq0$. Το τριώνυμο $\lambda^2-4\lambda-5$ γίνεται ετερόσημο του $\alpha=1>0$ όταν ο λ παίρνει τιμές εντός των ριζών -1 και 5 του τριωνύμου και, επειδή $\lambda \in \mathbb{R}-\{-1,5\}$, έχουμε $\lambda \in (-1, 5)$, δηλαδή $\Delta < 0$, άρα η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ δεν έχει ρίζες.

ΘΕΜΑ 4_13107

Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. *(Μονάδες 8)*

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. *(Μονάδες 5)*

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 6)*

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$. *(Μονάδες 6)*

Λύση

α) $\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ και

$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1.$

γ) Αφού $P = 1 > 0$, οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες, ή και οι δύο θετικές ή και οι δύο αρνητικές. Όμως $S = \dfrac{\overbrace{\lambda^2 + 1}^{(+)}}{\underbrace{\lambda}_{(+)}} > 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

δ) Αφού $0 < \lambda \neq 1$, από το ερώτημα (γ) οι ρίζες x_1, x_2 του τριωνύμου είναι θετικές, δηλαδή ισχύει $0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$. Ο πίνακας προσήμου του παραπάνω τριωνύμου έχει τη μορφή:

x	$-\infty$	0		x_1		κ		x_2		μ	$+\infty$
$f(x)$		$+$		0		$-$		0		$+$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει $f(0) > 0$, $f(\kappa) < 0$ και $f(\mu) > 0$, άρα $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu) < 0$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_474

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών 1, 3, 5, 7, …

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. *(Μονάδες 15)*

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) Η ακολουθία των θετικών περιττών αριθμών είναι αριθμητική πρόοδος, αφού η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών θετικών περιττών αριθμών είναι σταθερή και ίση με 2, δηλαδή $\omega = 2$. Επίσης, $\alpha_1 = 1$. Άρα $\alpha_{100} = \alpha_1 + 99\omega \Leftrightarrow \alpha_{100} = 1 + 99 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{100} = 1 + 198 \Leftrightarrow \alpha_{100} = 199$.

β) Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 2$, άρα ο γενικός όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow{\alpha_1=1,\ \omega=2} \alpha_\nu = 1 + (\nu - 1) \cdot 2 = 2\nu - 1,$$

$\nu = 1, 2, \ldots$ Το άθροισμα των ν πρώτων όρων της α_ν είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 1 + (\nu - 1)\cdot 2\right] =$$

$$= \frac{\nu}{2}(2 + 2\nu - 2) = \frac{\nu}{2}\cdot 2\nu = \nu^2.$$

ΘΕΜΑ 2_480

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει κ καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας. (*Μονάδες 12*)

β) Πόσα καθίσματα έχει η κάθε σειρά; (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Η ακολουθία που εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι αριθμητική πρόοδος, καθώς η διαφορά του αριθμού των καθισμάτων δύο διαδοχικών σειρών είναι σταθερή και ίση με κ.

β) Ο γενικός όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά κ και πρώτο όρο α_1 δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + \kappa(\nu - 1)$, οπότε

$\alpha_7 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\kappa = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 6\kappa \ (1)$.

Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων είναι $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\kappa\right]$, άρα

$S_{10} = 300 \Leftrightarrow 5(2\alpha_1 + 9\kappa) = 300 \Leftrightarrow$

$10\alpha_1 + 45\kappa = 300 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10(36 - 6\kappa) + 45\kappa = 300 \Leftrightarrow$

$360 - 15\kappa = 300 \Leftrightarrow 15\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 4$.

Επίσης, $\alpha_1 = 36 - 6\kappa = 36 - 24 = 12$. Άρα το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς, $\nu = 1, 2, \ldots, 10$, δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu = 12 + (\nu - 1)4$. Επομένως η 1η σειρά έχει 12 καθίσματα, η 2η 16, η 3η 20, η 4η 24, η 5η 28, η 6η 32, η 7η 36, η 8η 40, η 9η 44 και η τελευταία 48.

ΘΕΜΑ 2_495

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ ισχύει $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (*Μονάδες 13*)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Ισχύει $\alpha_3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\lambda^2}\ (1)$ και

$\alpha_5 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^4 = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\lambda^2}\lambda^4 = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

και, επειδή $\lambda > 0$, είναι $\lambda = 2$. Επίσης, για $\lambda = 2$ από (1) έχουμε $\alpha_1 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

β) Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \xLeftrightarrow{\lambda=2,\ \alpha_1=\frac{1}{4}} \alpha_\nu = \frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow$

$\alpha_\nu = 2^{-2}\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-3}$.

ΘΕΜΑ 2_508

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \ldots, \nu$. (*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακεραίους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι $1, 2, 3, \ldots, \nu$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το 1 και διαφορά $\omega = 1$. Άρα το άθροισμά τους S_ν δίνεται από τη σχέση $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 1 + (\nu - 1)\cdot 1\right] = \frac{\nu}{2}(\nu + 1)$.

β) $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\nu + 1) = 45 \Leftrightarrow \nu(\nu + 1) = 90 \Leftrightarrow$

$\nu^2 + \nu - 90 = 0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\nu^2 + \nu - 90$ είναι $\Delta = 1^2 - 4\cdot(-90) = 361$ και οι ρίζες του $\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{-1+19}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \in \mathbb{N}, \text{ δεκτή} \\ \nu_2 = \dfrac{-1-19}{2} = \dfrac{-20}{2} = -10 \notin \mathbb{N}, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους πρώτους 9 διαδοχικούς θετικούς ακεραίους για να πάρουμε άθροισμα 45.

ΘΕΜΑ 2_1015

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(*Μονάδες 10*)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Έχουμε

$\alpha_4 - \alpha_2 = 2\omega \Leftrightarrow 4 - 0 = 2\omega \Leftrightarrow 4 = 2\omega \Leftrightarrow \omega = 2$

και

$\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + (2-1)\omega = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0 \overset{\omega=2}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 = -2.$

β) Ισχύει

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \underset{\omega=2}{\overset{\alpha_1=-2}{\Longleftrightarrow}} \alpha_\nu = -2 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow$

$\alpha_\nu = -2 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4.$

Έχουμε

$\alpha_\nu = 2\nu - 4 \overset{\alpha_\nu=98}{\Longleftrightarrow} 98 = 2\nu - 4 \Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51,$

δηλαδή ο 51ος όρος της προόδου ισούται με 98.

ΘΕΜΑ 2_1032

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(*Μονάδες 13*)

β) Να βρείτε τον λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

(*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Έστω $\alpha = x$, $\beta = 2x+1$, $\gamma = 5x+4$. Για να είναι οι α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, πρέπει

$\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow (2x+1)^2 = x(5x+4) \Leftrightarrow$

$4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

β) i) Για $x = 1$ οι όροι είναι 1, 3, 9 και έχουν λόγο $\lambda = \frac{9}{3} = 3.$

ii) Για $x = -1$ οι όροι είναι -1, -1, -1 και αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με σταθερό λόγο $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 2_1050

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(*Μονάδες 13*)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

(*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Για να είναι οι αριθμοί $\alpha = x+2$, $\beta = (x+1)^2$, $\gamma = 3x+2$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει $2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = x + 2 + 3x + 2 \Leftrightarrow$

$2(x^2 + 2x + 1) = 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 4x + 4 \Leftrightarrow$

$2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

β) i) Για $x = 1$ οι όροι είναι 3, 4, 5 και έχουν διαφορά $\omega = 5 - 4 = 4 - 3 = 1$.

ii) Για $x = -1$ οι όροι είναι 1, 0, -1 και έχουν διαφορά $\omega = -1 - 0 = 0 - 1 = -1$.

ΘΕΜΑ 2_1057

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Να εκφράσετε με μία αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(*Μονάδες 9*)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(*Μονάδες 8*)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$, άρα ο ν-οστός όρος της είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \underset{\omega=20}{\overset{\alpha_1=120}{\Longleftrightarrow}} \alpha_\nu = 120 + (\nu-1)\cdot 20 \Leftrightarrow$$

$\alpha_\nu = 120 + 20\nu - 20 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 20\nu + 100$, για $\nu = 1, 2, \ldots, 10$.

β) Για $\nu = 10$ έχουμε $\alpha_{10} = 20\cdot 10 + 100 = 300$ καθίσματα.

γ) Το γυμναστήριο έχει συνολικά

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) \Leftrightarrow S_{10} = 5(120+300) \Leftrightarrow$$

$S_{10} = 5\cdot 420 \Leftrightarrow S_{10} = 2100$ καθίσματα.

ΘΕΜΑ 2_1064

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (*Μονάδες 9*)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (*Μονάδες 8*)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow$

$4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

β) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 19 + 19\cdot 6 = 19 + 114 = 133$

γ) $$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\alpha_1 + 19\omega\right] \underset{\omega=6}{\overset{\alpha_1=19}{\Longleftrightarrow}} S_{20} = 10(2\cdot 19 + 19\cdot 6) \Leftrightarrow$$

$S_{20} = 10\cdot 152 \Leftrightarrow S_{20} = 1520$

ΘΕΜΑ 2_1086

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x. (*Μονάδες 10*)

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν):

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (*Μονάδες 7*)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Αφού A, B, Γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει $2B = A + \Gamma \Leftrightarrow 2(x+4) = 1 + x + 8 \Leftrightarrow$

$2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$.

β) Για $x = 1$ έχουμε $A = \alpha_1 = 1$, $B = 5$, $\Gamma = 9$ και

i) $\omega = 9 - 5 = 5 - 1 = 4$.

ii) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega \underset{\omega=4}{\overset{\alpha_1=1}{\Longleftrightarrow}} \alpha_{20} = 1 + 19\cdot 4 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 77$.

ΘΕΜΑ 2_1088

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (*Μονάδες 9*)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (*Μονάδες 9*)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x, ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Αφού οι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, θα ισχύει

$2x = 4 - x + 2 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

β) Αφού οι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, θα ισχύει

$x^2 = 2(4 - x) \Leftrightarrow x^2 = 8 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$.

Λύνουμε την εξίσωση που προέκυψε, για την οποία $\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = 36$

και οι ρίζες της είναι

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-2-6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}.$$

γ) Λαμβάνοντας υπόψη τα ερωτήματα (α) και (β), προκύπτει ότι, για να είναι οι αριθμοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, πρέπει $x = 2$.

ΘΕΜΑ 2_1301

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow$
$2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$

β) Γνωρίζουμε ότι $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$ (1).

Για $\nu = 3$, $S_3 = 33$, $\omega = 5$ η σχέση (1) γίνεται

$S_3 = \frac{3}{2}\left[2\alpha_1 + (3-1)\cdot 5\right] \Leftrightarrow 33 = \frac{3}{2}(2\alpha_1 + 10) \Leftrightarrow$

$33 = \frac{3}{2}\cdot 2(\alpha_1 + 5) \Leftrightarrow \alpha_1 + 5 = 11 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6.$

ΘΕΜΑ 2_1513

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu > 30$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $\alpha_3 = 9 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 9 \Leftrightarrow 1 + 2\omega = 9 \Leftrightarrow$
$2\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 4$

β) $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega > 30 \overset{\alpha_1=1}{\underset{\omega=4}{\Leftrightarrow}}$

$1 + 4(\nu - 1) > 30 \Leftrightarrow 1 + 4\nu - 4 > 30 \Leftrightarrow$

$4\nu > 33 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4}$, άρα η μικρότερη θετική ακέραια τιμή του ν είναι το 9.

ΘΕΜΑ 2_3828

Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε τον λόγο λ της προόδου. (*Μονάδες 12*)

β) **i)** Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (*Μονάδες 6*)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Πρέπει $(2\kappa)^2 = (\kappa - 2)(7\kappa + 4) \Leftrightarrow$
$4\kappa^2 = 7\kappa^2 - 10\kappa - 8 \Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0.$
Η διακρίνουσα του τριωνύμου $3\kappa^2 - 10\kappa - 8$ είναι
$\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 3(-8) = 100 + 96 = 196 > 0$, άρα

$\kappa_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{196}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow \kappa_{1,2} = \frac{10 \pm 14}{6} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{10+14}{6} = 4 \in \mathbb{N}, \text{ δεκτή} \\ \kappa_2 = \frac{10-14}{6} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι

$\lambda = \frac{7\kappa + 4}{2\kappa} \overset{\kappa=4}{=\!=} \frac{7\cdot 4 + 4}{2\cdot 4} = \frac{32}{8} = 4.$

β) **i)** Είναι $\alpha_2 = \alpha_1\lambda = 4\alpha_1$,
$\alpha_5 = \alpha_1\lambda^4 = \alpha_1 4^4 = 256\alpha_1$ και $\alpha_4 = \alpha_1 4^3 = 64\alpha_1$.

ii) Έχουμε $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4) \Leftrightarrow$

$4\alpha_1 + 256\alpha_1 = 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) \Leftrightarrow 260\alpha_1 = 260\alpha_1$, που ισχύει.

ΘΕΜΑ 2_4288

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (*Μονάδες 13*)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i) τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (*Μονάδες 6*)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) Για να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, πρέπει $(2 - x)^2 = (x + 4)(6 - x) \Leftrightarrow$

$2^2 - 4x + x^2 = 6x - x^2 + 24 - 4x \Leftrightarrow$
$4 + x^2 = 6x - x^2 + 24 \Leftrightarrow$

$2x^2-6x-20=0$.

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-20)=36+160=196>0$,

άρα οι ρίζες της είναι

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{196}}{2\cdot 2}=\frac{6\pm 14}{4}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{6+14}{4}=\dfrac{20}{4}=5 \\ x_2=\dfrac{6-14}{4}=-\dfrac{8}{4}=-2 \end{cases}.$$

β) Αν $x=5$, τότε $x+4=9$, $2-x=-3$, $6-x=1$.
Άρα ο τέταρτος όρος της προόδου είναι $\alpha_4=1$. Έχουμε:

i) $\lambda=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$ και

ii) $\alpha_4=\alpha_1\lambda^3\Leftrightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\Leftrightarrow\alpha_1=-27$.

ΘΕΜΑ 2_4300

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν $\alpha_1=2$ και $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=3$. (*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Ισχύει ότι $\alpha_{25}-\alpha_{12}=2+24\omega-(2+11\omega)=13\omega$.
Από υπόθεση $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39\Leftrightarrow\alpha_{25}-\alpha_{12}=39\Leftrightarrow 13\omega=39\Leftrightarrow\omega=3$.

β) Ο ν-οστός όρος της προόδου είναι

$\alpha_\nu=\alpha_1+\omega(\nu-1)\overset{\alpha_1=2}{\underset{\omega=3}{\Leftrightarrow}}\alpha_\nu=2+3(\nu-1)\Leftrightarrow$

$\alpha_\nu=2+3\nu-3\Leftrightarrow\alpha_\nu=3\nu-1$.

Έχουμε

$\alpha_\nu=152\Leftrightarrow 3\nu-1=152\Leftrightarrow 3\nu=153\Leftrightarrow\nu=51$.

Άρα ίσος με 152 είναι ο 51ος όρος της προόδου.

ΘΕΜΑ 2_4301

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$. (*Μονάδες 13*)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=\frac{\alpha_1+\omega(15-1)-\left[\alpha_1+\omega(9-1)\right]}{\alpha_1+\omega(10-1)-\left[\alpha_1+\omega(7-1)\right]}=$$

$$=\frac{\alpha_1+14\omega-\alpha_1-8\omega}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=\frac{6\omega}{3\omega}=2$$

β) $\alpha_{15}-\alpha_9=18\xLeftrightarrow{\alpha_{15}-\alpha_9=6\omega}6\omega=18\Leftrightarrow\omega=3$

ΘΕΜΑ 2_4303

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν $\alpha_4-\alpha_9=15$ και $\alpha_1=41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu=\nu$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Ισχύει ότι

$\alpha_9-\alpha_4=\alpha_1+8\omega-(\alpha_1+3\omega)=5\omega\Leftrightarrow$

$\alpha_4-\alpha_9=-5\omega\ (1)$.

Από υπόθεση $\alpha_4-\alpha_9=15\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-5\omega=15\Leftrightarrow\omega=-3$.

β) Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) δίνεται από τη σχέση

$\alpha_\nu=\alpha_1+\omega(\nu-1)\Rightarrow\alpha_\nu=41-3(\nu-1)\Rightarrow$

$\alpha_\nu=44-3\nu$. Έχουμε

$\alpha_\nu=\nu\Rightarrow 44-3\nu=\nu\Rightarrow 4\nu=44\Rightarrow\nu=11$, άρα $\alpha_{11}=11$.

ΘΕΜΑ 2_4304

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega=4$ ισχύει $\alpha_6+\alpha_{11}=40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (*Μονάδες 12*)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Ισχύουν οι σχέσεις $\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega \overset{\omega=4}{=} \alpha_1 + 20$ και

$\alpha_{11} = \alpha_1 + 10\omega \overset{\omega=4}{=} \alpha_1 + 40.$

Από υπόθεση έχουμε $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$, άρα

$\alpha_1 + 20 + \alpha_1 + 40 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10.$

β) Το άθροισμα ν πρώτων όρων της (α_ν) δίνεται από τη σχέση

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + \omega(\nu - 1)\right] \Rightarrow$$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot(-10) + 4(\nu - 1)\right] \Rightarrow$$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(-20 + 4\nu - 4) \Rightarrow$$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(4\nu - 24) \Rightarrow S_\nu = 2\nu^2 - 12\nu.$$

Έχουμε

$$S_\nu = 0 \Leftrightarrow 2\nu^2 - 12\nu = 0 \Leftrightarrow 2\nu(\nu - 6) = 0 \overset{\nu \neq 0}{\Leftrightarrow} \nu = 6.$$

Πρέπει να προσθέσουμε τους 6 πρώτους όρους της προόδου, ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με το μηδέν.

ΘΕΜΑ 2_4312

Οι αριθμοί $x+6, 5x+2, 11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Αφού οι δοθέντες αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, θα ισχύει ότι

$$2(5x+2) = (x+6) + (11x-6) \Leftrightarrow 10x + 4 = 12x \Leftrightarrow$$

$$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα $\omega = 5x + 2 - (x+6) = 5x + 2 - x - 6 =$

$$= 4x - 4 \overset{x=2}{=} 4\cdot 2 - 4 = 4.$$

β) $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + \omega(\nu-1)\right] \Rightarrow$

$$S_8 = \frac{8}{2}\left[2\cdot 0 + 4(8-1)\right] = 4\cdot 28 = 112.$$

ΘΕΜΑ 2_4315

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27.$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (*Μονάδες 10*)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Ισχύει ότι $\alpha_5 = \alpha_1\lambda^4$ και $\alpha_2 = \alpha_1\lambda$.

Από υπόθεση

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{27} = 3.$$

β) Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων δίνεται από τη σχέση $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$. Για $\lambda = 3$ και $\nu = 4$ έχουμε $S_4 = \alpha_1 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \Leftrightarrow 200 = \alpha_1 \cdot \frac{81-1}{2} \Leftrightarrow$

$40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5.$

ΘΕΜΑ 2_4319

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (*Μονάδες 13*)

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$.)

Λύση

α) Ισχύει ότι

$$\alpha_5 - \alpha_1 = 14 - 2 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 4\omega) - \alpha_1 = 12 \Leftrightarrow$$

$$4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3.$$

β) Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τη σχέση $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$.

Για $\alpha_1 = 2, \omega = 3$ και $S_\nu = 77$ έχουμε

$$77 = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2 + (\nu-1)3\right] \Leftrightarrow 77 = \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) \Leftrightarrow$$

$$77\cdot 2 = \nu(3\nu + 1) \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu = 154 \Leftrightarrow$$

$$3\nu^2 + \nu - 154 = 0.$$

Βρίσκουμε τους φυσικούς αριθμούς που είναι ρίζες της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 3\cdot\left(-154\right) = 1849 > 0$, άρα

$$\nu_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1849}}{2\cdot 3} = \frac{-1\pm 43}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{-1+43}{6} = \dfrac{42}{6} = 7, \text{ δεκτή} \\ \nu_2 = \dfrac{-1-43}{6} = \dfrac{-44}{6} = -\dfrac{22}{3} \notin \mathbb{N}, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Τελικά, ίσο με 77 είναι το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της $\left(\alpha_\nu\right)$.

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_2047

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του *Α*. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη *Α*, η δεύτερη 4 μέτρα από το *Α*, η τρίτη 7 μέτρα από το *Α* και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη *Α* 3 επιπλέον μέτρα σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.20

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη *Α* αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν^{o} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (*Μονάδες 6*)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη *Α* είναι η 20ή κυψέλη; (*Μονάδες 6*)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη *Α* συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη *Α*.

i) Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (*Μονάδες 6*)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Αφού η κάθε κυψέλη απέχει από την αποθήκη *Α* 3 επιπλέον μέτρα σε σχέση με την προηγούμενη, η διαφορά των αποστάσεων δύο διαδοχικών κυψελών από την αποθήκη είναι σταθερή και ίση με 3. Άρα οι αποστάσεις αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$, που εκφράζει την απόσταση της πρώτης κυψέλης από την αποθήκη, και διαφορά $\omega = 3$, που εκφράζει την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κυψελών.

β) Ο γενικός όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_\nu = 1 + 3\left(\nu - 1\right)$. Η απόσταση της 20ής κυψέλης από την αποθήκη είναι $\alpha_{20} = 1 + 3\left(20 - 1\right) = 58$ μέτρα.

γ) **i)** Για να συλλέξει ο μελισσοκόμος το μέλι από την 3η κυψέλη, θα διανύσει απόσταση

$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 + 8 + 14 = 24$ μέτρα.

ii) Η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος είναι το άθροισμα των αποστάσεων

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{20} = 2\left(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{20}\right) =$$

$$= 2S_{20} = 2\left[\frac{20}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_{20}\right)\right] = 20\left(1 + 58\right) = 1180$$

μέτρα.

ΘΕΜΑ 4_2083

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δύο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (*Μονάδες 10*)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου. (*Μονάδες 5*)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου, προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και τη 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Η ακολουθία $\left(\alpha_\nu\right)$ που εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων της *ν*-οστής σειράς είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα $\alpha_\nu = \alpha_1 + \left(\nu - 1\right)\omega \Rightarrow$

$\alpha_\nu = 12 + \left(\nu - 1\right)2 \Rightarrow \alpha_\nu = 10 + 2\nu$. Η μεσαία σειρά αντιστοιχεί στον αριθμητικό μέσο των όρων 1 και 25, που είναι ο $\frac{25+1}{2}=13$, ο οποίος είναι όρος της αριθμητικής προόδου 1, 2, 3, …, 25, αφού έχουμε περιττό πλήθος όρων. Άρα η μεσαία σειρά έχει $\alpha_{13}=10+2\cdot 13=36$ καθίσματα και η τελευταία $\alpha_{25}=10+2\cdot 25=60$ καθίσματα.

β) Το πλήθος των καθισμάτων είναι το άθροισμα S_{25} των 25 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_ν). Άρα το στάδιο έχει συνολικά

$$S_{25}=\frac{25}{2}(12+60)=\frac{25}{2}\cdot 72=900 \text{ καθίσματα.}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι

$$\alpha_7+\alpha_8+\ldots+\alpha_{14}=$$
$$=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_6+\alpha_7+\ldots+\alpha_{14}-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_6)=$$
$$=S_{14}-S_6=\frac{14}{2}(2\cdot 12+13\cdot 2)-\frac{6}{2}(2\cdot 12+5\cdot 2)=$$
$$=350-102=248 \text{ μαθητές.}$$

ΘΕΜΑ 4_2323

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15, … και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 4*)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (*Μονάδες 7*)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 7*)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Οι αριθμοί 3, 7, 11, 15, … είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αφού ο κάθε αριθμός διαφέρει από τον προηγούμενό του κατά 4, δηλαδή κατά τον ίδιο πάντα σταθερό αριθμό.

β) Έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1=3$ και διαφορά $\omega=4$, άρα

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]\overset{\nu=40}{\Longleftrightarrow}$$
$$S_{40}=\frac{40}{2}\left[2\cdot 3+(40-1)\cdot 4\right]\Leftrightarrow$$
$$S_{40}=20(6+156)\Leftrightarrow S_{40}=3240.$$

γ) $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \underset{\alpha_1=3,\ \omega=4}{\overset{\alpha_\nu=120}{\Longleftrightarrow}} 120=3+(\nu-1)\cdot 4\Leftrightarrow$

$$120=3+4\nu-4\Leftrightarrow 4\nu=121\Leftrightarrow \nu=\frac{121}{4}\notin\mathbb{N}^*,$$

άρα ο αριθμός 120 δεν είναι ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ) Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235.

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \underset{\alpha_1=3,\ \omega=4}{\overset{\alpha_\nu=235}{\Longleftrightarrow}} 235=3+(\nu-1)\cdot 4\Leftrightarrow$$
$$235=3+4\nu-4\Leftrightarrow 4\nu=236\Leftrightarrow \nu=59 \text{ και}$$
$$S_{59}=\frac{59}{2}\left[2\cdot 3+(59-1)\cdot 4\right]=\frac{59}{2}(6+232)=7021.$$

Το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος είναι $\alpha_{41}+\alpha_{42}+\alpha_{43}+\ldots+\alpha_{59}=S_{59}-S_{40}=$
$=7021-3240=3781.$

ΘΕΜΑ 4_2340

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, τον 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, τον 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) **i)** Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στον λογαριασμό τον $\nu^{\text{ο}}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (*Μονάδες 4*)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στον λογαριασμό τον $\nu^{\text{ο}}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (*Μονάδες 4*)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (*Μονάδες 5*)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (*Μονάδες 5*)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (*Μονάδες 3*)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (*Μονάδες 4*)

Λύση

α) i) Τα ποσά κατάθεσης κάθε μήνα στο πρόγραμμα *Α* αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 2,$ άρα

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}.$

ii) Τα ποσά κατάθεσης κάθε μήνα στο πρόγραμμα *Β* αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 100$ και $\omega = 10,$ άρα

$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \beta_\nu = 100 + 10(\nu-1) \Leftrightarrow$

$\beta_\nu = 10\nu + 90.$

iii) $A_\nu = S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 2^\nu - 1.$

iv) $B_\nu = S_\nu = \dfrac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu) = \dfrac{\nu}{2}(100 + 10\nu + 90) =$

$= \dfrac{\nu}{2}(190 + 10\nu) = \nu(5\nu + 95).$

β) i) $A_\nu = 2^\nu - 1 \overset{\nu=6}{\Longleftrightarrow} A_6 = 2^6 - 1 = 63$ ευρώ.

$B_\nu = \nu(5\nu + 95) \overset{\nu=6}{\Longleftrightarrow} B_6 = 6(5 \cdot 6 + 95) = 750$ ευρώ.

ii) $A_\nu = 2^\nu - 1 \overset{\nu=12}{\Longleftrightarrow} A_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$ ευρώ και

$B_\nu = \nu(5\nu + 95) \overset{\nu=12}{\Longleftrightarrow} B_{12} = 12(5 \cdot 12 + 95) = 1860$ ευρώ, άρα με το πρόγραμμα *Α* θα συγκεντρωθεί μεγαλύτερο ποσό μετά από 12 μήνες.

ΘΕΜΑ 4_4629

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 *m*, με τον ακόλουθο τρόπο:
Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το *1ο λεπτό* προχωράει 1 *cm*, το *2ο λεπτό* προχωράει 3 *cm* και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 *cm* μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου. (*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα *5 λεπτά* της κίνησής του. (*Μονάδες 4*)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού. (*Μονάδες 4*)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το *1ο λεπτό* προχωράει 1 *cm*, το *2ο λεπτό* προχωράει 2 *cm*, το *3ο λεπτό* προχωράει 4 *cm* και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου. (*Μονάδες 7*)

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 *cm*. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αφού ο κάθε όρος διαφέρει από τον προηγούμενο κατά την ίδια σταθερή διαφορά 2. Για την αριθμητική αυτή πρόοδο έχουμε $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2,$ άρα

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + 2(\nu-1) \Leftrightarrow$

$\alpha_\nu = 2\nu - 1.$

β) $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \overset{\nu=5}{\Longleftrightarrow}$

$S_5 = \dfrac{5}{2}\left[2 \cdot 1 + (5-1) \cdot 2\right] \Leftrightarrow S_5 = 25,$ άρα το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του κάλυψε απόσταση 25 *cm*.

γ) $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \overset{S_\nu = 1m = 100cm}{\Longleftrightarrow}$

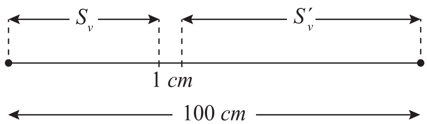
$100 = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 2\right] \Leftrightarrow \nu^2 = 100 \overset{\nu\in\mathbb{N}^*}{\Longleftrightarrow} \nu = 10,$

άρα το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού σε 10 λεπτά.

δ) i) Οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αφού ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε σταθερού αριθμού, που είναι ο 2. Για τη γεωμετρική αυτή πρόοδο έχουμε $\beta_1 = 1$ και $\lambda = 2$, άρα

$\beta_\nu = \beta_1 \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 2^{\nu-1}$.

ii)



Αν $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 2\right] = \nu^2$ είναι η απόσταση που διανύει το μυρμήγκι στα πρώτα ν λεπτά της κίνησής του και

$S'_\nu = \beta_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S'_\nu = 2^\nu - 1$ είναι η απόσταση που διανύει η αράχνη στα πρώτα ν λεπτά της κίνησής της, τότε από το σχήμα προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει:

$S_\nu + 1 + S'_\nu = 100 \Leftrightarrow \nu^2 + 1 + 2^\nu - 1 = 100 \Leftrightarrow$

$\nu^2 + 2^\nu = 100$. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι $\nu = 6$, αφού $6^2 + 2^6 = 36 + 64 = 100$. Άρα το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm έπειτα από 6 λεπτά.

ΘΕΜΑ 4_4671

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. *(Μονάδες 6)*

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$. *(Μονάδες 6)*

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; *(Μονάδες 7)*

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; *(Μονάδες 6)*

Λύση

α) $\alpha_{20} - \alpha_{10} = \alpha_1 + 19\omega - (\alpha_1 + 9\omega) =$

$= \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 10\omega \quad (1)$

β) $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$, άρα

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \underset{\omega=3}{\overset{\alpha_1=1}{\Longleftrightarrow}} \alpha_\nu = 1 + 3(\nu-1) \Leftrightarrow$

$\alpha_\nu = 3\nu - 2 \quad (2)$

γ) $\alpha_\nu > 30 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3\nu - 2 > 30 \Leftrightarrow 3\nu > 32 \Leftrightarrow \nu > \frac{32}{3} \simeq 10{,}7,$

άρα ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο 11ος όρος.

δ) $\alpha_\nu < 60 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow 3\nu < 62 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3} \simeq 20{,}7,$

άρα 20 όροι είναι μικρότεροι του 60.

ΘΕΜΑ 4_4858

Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά. *(Μονάδες 6)*

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. *(Μονάδες 6)*

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. *(Μονάδες 6)*

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. *(Μονάδες 7)*

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ελαφιών αυξάνεται σταθερά $(+60)$ στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά. Το πλήθος των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1300$ και $\omega = 60$, άρα η σχέση που επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά είναι

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1300 + 60(\nu - 1) = 60\nu + 1240.$

β) **i)** Αφού το 2000 έχουμε τον 1ο όρο, το 2001 θα έχουμε τον 2ο όρο, οπότε το 2012 θα έχουμε τον 13ο όρο, άρα $\alpha_\nu = 60\nu + 1240 \overset{\nu=13}{\Longleftrightarrow}$

$\alpha_{13} = 60 \cdot 13 + 1240 \Leftrightarrow$

$\alpha_{13} = 780 + 1240 \Leftrightarrow \alpha_{13} = 2020.$

ii) Ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα έχει αυξηθεί κατά 60%, δηλαδή θα έχει αυξηθεί κατά $60\% \cdot 1300 = \frac{60}{100} \cdot 1300 = 60 \cdot 13 = 780$ ελάφια, όταν θα έχουμε $1300 + 780 = 2080$ ελάφια. Αυτό θα συμβεί στο τέλος του 2013, διότι $2080 = 2020 + 60$.

Άλλος τρόπος

$\alpha_\nu = 60\nu + 1240 \overset{\alpha_\nu = 2080}{\Longleftrightarrow} 2080 = 60\nu + 1240 \Leftrightarrow$

$60\nu = 840 \Leftrightarrow \nu = 14$, ο 14ος όρος, δηλαδή στο τέλος του 2013.

iii) $\alpha_\nu \leq 2600 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 \leq 2600 \Leftrightarrow$

$60\nu \leq 1360 \Leftrightarrow \nu \leq 22{,}666...$, άρα $\nu = 22$, δηλαδή στο τέλος του έτους 2021.

ΘΕΜΑ 4_4925

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. *(Μονάδες 8)*

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. *(Μονάδες 8)*

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. *(Μονάδες 9)*

Λύση

α) $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa + 1)^2 - \kappa^2 =$

$= \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa + 1$, περιττός.

β) **i)** Έχουμε

$\alpha_2 = \kappa^2 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = \kappa^2 \Leftrightarrow 2 + 2\kappa + 1 = \kappa^2 \Leftrightarrow$

$\kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0.$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$, άρα

$\kappa_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow \kappa_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \kappa_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$. Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται, αφού $\kappa > 1$. Τελικά, $\kappa = 3$.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι $\omega = 2\kappa + 1$, άρα $\omega = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$.

ii) Αφού $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 7$, ο γενικός όρος α_ν της προόδου θα είναι

$\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1) \cdot 7 = 2 + 7\nu - 7 = 7\nu - 5$. Έχουμε

$\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow 7\nu - 5 = 1017 \Leftrightarrow 7\nu = 1017 + 5 \Leftrightarrow$

$7\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = \frac{1022}{7} \Leftrightarrow \nu = 146$, άρα ο 146ος όρος της προόδου ισούται με 1017.

ΘΕΜΑ 4_6143

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δε γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις, και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. *(Μονάδες 6)*

β) Να αποδείξετε ότι η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. *(Μονάδες 6)*

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. *(Μονάδες 13)*

Λύση

α) $x(x - 1) = (x + 3)(x - 3) - 1 \Leftrightarrow$

$x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow x = 10$

β) Οι μαθητές της Α΄ τάξης είναι
$x(x-1)=10\cdot 9=90$.

γ) Το πλήθος των μαθητών σε κάθε ομάδα είναι όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=2$ και $\omega=2$. Άρα στη ν-οστή ομάδα πηγαίνουν $\alpha_\nu=2+2(\nu-1)\Leftrightarrow\alpha_\nu=2+2\nu-2\Leftrightarrow\alpha_\nu=2\nu$ μαθητές. Το άθροισμά τους δίνεται από τον τύπο

$S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}(2+2\nu)=\nu(\nu+1)$.

Άρα $\nu(\nu+1)=90\Leftrightarrow\nu^2+\nu-90=0\Leftrightarrow$

$\nu^2+10\nu-9\nu-90=0\Leftrightarrow\nu(\nu+10)-9(\nu+10)=0\Leftrightarrow$

$(\nu+10)(\nu-9)=0\Leftrightarrow(\nu=-10$ ή $\nu=9)$, η αρνητική λύση απορρίπτεται, επομένως $\nu=9$ ομάδες.

ΘΕΜΑ 4_6678

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν E, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, E, β, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E=1$. *(Μονάδες 10)*

β) Αν $\alpha+\beta=10$, τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β. *(Μονάδες 5)*

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) Ισχύει ότι το εμβαδόν είναι ίσο με $E=\alpha\beta$. Για τους διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου ισχύει $E^2=\alpha\beta$. Άρα

$E^2=E\Leftrightarrow E^2-E=0\Leftrightarrow E(E-1)=0\Leftrightarrow$

$(E=0$ ή $E=1)$. Επειδή $E>0$, συμπεραίνουμε ότι $E=1$.

β) i) Έχουμε $S=\alpha+\beta=10$ και από το ερώτημα (α) προκύπτει $P=\alpha\beta=E=1$. Άρα μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-10x+1=0$.

ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2-10x+1=0$:

$\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot1=96>0$, άρα

$x_{1,2}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{96}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{6\cdot16}}{2}=$

$=\frac{10\pm4\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow x_{1,2}=5\pm2\sqrt{6}$.

Επομένως τα μήκη του ορθογωνίου είναι $5+2\sqrt{6}\,\mu$. και $5-2\sqrt{6}\,\mu$.

ΘΕΜΑ 4_6859

Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; *(Μονάδες 5)*

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; *(Μονάδες 5)*

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, …, τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). *(Μονάδες 7)*

ii) Να βρείτε την τιμή του ν, ώστε για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει $2(S_\nu+24)=\beta_7$. *(Μονάδες 8)*

Λύση

α) Θα πρέπει ο x να είναι αριθμητικός μέσος του 2 και του 8. Άρα $2x=2+8\Leftrightarrow2x=10\Leftrightarrow x=5$ και $\omega=5-2=3$.

β) Πρέπει $x^2=2\cdot8\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm4$. Όμως $x>0$, άρα $x=4$. Τότε οι όροι είναι οι 2, 4, 8 και ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=2$.

γ) i) $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+\omega(\nu-1)\right]=\frac{\nu}{2}\left[2\cdot2+3(\nu-1)\right]=$

$=\frac{\nu}{2}(4+3\nu-3)=\frac{\nu}{2}(3\nu+1)$

ii) $2(S_\nu+24)=\beta_7\Leftrightarrow2\left[\frac{\nu}{2}(3\nu+1)+24\right]=\beta_1\lambda^6\Leftrightarrow$

$\nu(3\nu+1)+48=2\cdot2^6\Leftrightarrow3\nu^2+\nu+48=128\Leftrightarrow$

$3\nu^2+\nu-80=0\ (1)$

Η (1) έχει

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-80) = 1+960 = 961 > 0$, άρα

$$\nu_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{961}}{2\cdot 3} = \frac{-1\pm 31}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{-1+31}{6} = \dfrac{30}{6} = 5 \\ \nu_2 = \dfrac{-1-31}{6} = \dfrac{-32}{6} = -\dfrac{16}{3} \end{cases}.$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{N}$, προκύπτει $\nu = 5$.

ΘΕΜΑ 4_7503

Οι αριθμοί x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (*Μονάδες 6*)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (*Μονάδες 5*)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (*Μονάδες 6*)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...+\alpha_{24}$. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $2(x^2+x) = x^2+5+2x+4 \Leftrightarrow$

$2x^2+2x = x^2+2x+9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) i) Ισχύει $\alpha_4 = x^2+5 = 3^2+5 = 14$

και $\alpha_5 = x^2+x = 3^2+3 = 12$. Άρα

$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12-14 = -2$.

ii) $\alpha_1 = \alpha_4 - 3\omega = 14 - 3\cdot(-2) = 14+6 = 20$

iii) Το άθροισμα των 14 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι

$S_{14} = \frac{14}{2}\left[2\cdot 20+13\cdot(-2)\right] =$

$= 7(40-26) = 7\cdot 14 = 98$ και το άθροισμα των 24 πρώτων όρων της είναι

$S_{24} = \frac{24}{2}\left[2\cdot 20+23\cdot(-2)\right] =$

$= 12(40-46) = 12\cdot(-6) = -72$.

Το ζητούμενο άθροισμα είναι το

$S = S_{24} - S_{14} = -72-98 = -170$.

ΘΕΜΑ 4_7504

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (*Μονάδες 9*)

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. (*Μονάδες 6*)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+...+(\alpha_{31}+31)$$

(*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Έχουμε

$\alpha_8 - \alpha_3 = 5\omega \Leftrightarrow 5\omega = 23-8 \Leftrightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$

και $\alpha_1 = \alpha_3 - 2\omega \Leftrightarrow \alpha_1 = 8-2\cdot 3 = 8-6 = 2$.

β) $\alpha_{31} = \alpha_1 + 30\omega = 2+30\cdot 3 = 92$

γ) Ισχύει

$S = (\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31) =$

$= S_{31}+1+2+3+\ldots+31$.

Το άθροισμα των 31 πρώτων όρων της προόδου είναι $S_{31} = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{31} = \frac{31}{2}(\alpha_1+\alpha_{31}) =$

$= \frac{31}{2}(2+92) = 31\cdot 47 = 1457$.

Επίσης, $1+2+...+31 =$

$= \underbrace{(1+31)+(2+30)+...+(15+17)}_{15}+16 =$

$= 15\cdot 32+16 = 480+16 = 496$.

Άρα $S = S_{31}+496 = 1457+496 = 1953$.

ΘΕΜΑ 4_7514

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (*Μονάδες 8*)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (*Μονάδες 8*)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Έχουμε $\alpha_{20} - \alpha_3 = 17\omega \Leftrightarrow 61 - 10 = 17\omega \Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$ και $\alpha_1 = \alpha_3 - 2\omega = 10 - 2\cdot 3 = 10 - 6 = 4.$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + \omega(\nu - 1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 4 + 3(\nu - 1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 4 + 3\nu - 3 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3\nu + 1.$ Πρέπει για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει $\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow 3\nu + 1 = 333 \Leftrightarrow 3\nu = 332 \Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3} \notin \mathbb{N}^*.$ Άρα ο 333 δεν είναι όρος της προόδου.

γ) Ισχύει $\alpha_\nu = 3\nu + 1 > 0,$ άρα οι όροι της προόδου (α_ν) είναι θετικοί αριθμοί.

Έστω x, y διαδοχικοί όροι της προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. Τότε $y = \frac{3}{2}x > x \Rightarrow y > x,$ άρα $y - x = \omega \Leftrightarrow y - x = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6.$ Επομένως πρέπει να υπάρχει κάποιος $\nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow 3\nu + 1 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}^*,$ άρα δεν υπάρχουν x, y διαδοχικοί όροι της προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

ΘΕΜΑ 4_8170

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου. (*Μονάδες 8*)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$, αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (*Μονάδες 9*)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9}S_{10}$$ (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Έχουμε $\lambda^2 = \frac{\alpha_5}{\alpha_3} = \frac{16}{4} = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2,$ δεκτή η λύση $\lambda = 2,$ αφού $\lambda > 0,$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha_1} = 2^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1.$

β) $$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right)^{-1} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$$

γ) Έχουμε $S_{10} = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{1} = 2^{10} - 1 \quad (1)$

και $$S'_{10} = \beta_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \overset{\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1}{=\!=\!=} 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{2^{10}} = 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^9} \overset{(1)}{=} \frac{S_{10}}{2^9} = \frac{1}{2^9}S_{10}.$$

ΘΕΜΑ 4_10775

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου. (*Μονάδες 4*)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (*Μονάδες 5*)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα, και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (*Μονάδες 5*)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς διαφέρει από την επόμενη κατά τον ίδιο πάντα αριθμό, άρα έχουμε αριθμητική πρόοδο.
Για την πρόοδο αυτή ισχύει $\alpha_1 = 16$ και
$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow$
$6\omega = 28 - 16 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2.$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + 2(\nu - 1) \Leftrightarrow$
$\alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 14 + 2\nu$

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}(2\cdot 16 + 19\cdot 2) = 10(32 + 38) =$
$= 10\cdot 70 = 700$ καθίσματα έχει όλο το θέατρο.

δ) i) Το πλήθος των κενών καθισμάτων κάθε σειράς είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$, άρα ο γενικός όρος β_ν της προόδου αυτής είναι $\beta_\nu = 6 + 3(\nu - 1) = 6 + 3\nu - 3 = 3 + 3\nu.$

Για να έχει μία σειρά μόνο κενά καθίσματα, θα πρέπει $\beta_\nu \geq \alpha_\nu \Leftrightarrow 3 + 3\nu \geq 14 + 2\nu \Leftrightarrow$
$3\nu - 2\nu \geq 14 - 3 \Leftrightarrow \nu \geq 11,$ άρα από την 11η σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Οι θεατές κάθονται από την 1η έως και τη 10η σειρά. Το πλήθος των καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\cdot 16 + 9\cdot 2) = \frac{10}{2}(32 + 18) =$$

$$= \frac{10}{2}\cdot 50 = 10\cdot 25 = 250$$

και οι κενές θέσεις στις σειρές αυτές είναι

$$S'_{10} = \frac{10}{2}(2\cdot 6 + 9\cdot 3) = \frac{10}{2}(12 + 27) =$$

$$= \frac{10}{2}\cdot 39 = 5\cdot 39 = 195.$$

Τελικά, οι θεατές είναι $250 - 195 = 55.$

ΘΕΜΑ 4_13088

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια $(\tau.\mu.)$, στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει $6\,\tau.\mu.$, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει $12\,\tau.\mu.$ και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα. (*Μονάδες 7*)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει $768\,\tau.\mu.$; (*Μονάδες 9*)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 $\tau.\mu.$ και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 $\tau.\mu.$ την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 $\tau.\mu.$ (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Η επιφάνεια της θάλασσας που καλύπτει το πετρέλαιο διπλασιάζεται, άρα ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = 2$, $\alpha_1 = 3$ και γενικό τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 3\cdot 2^{\nu-1}$. Για $\nu = 5$ έχουμε
$\alpha_5 = 3\cdot 2^4 = 3\cdot 16 = 48,$ δηλαδή στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα η επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο είναι $48\,\tau.\mu.$

β) Έχουμε $768 = 3\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^8 \Leftrightarrow$
$\nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9,$ άρα $768\,\tau.\mu.$ θα καλύπτει το πετρέλαιο μετά από 9 ημέρες από τη στιγμή του ατυχήματος.

γ) Η επιφάνεια της θάλασσας που καλύπτει το πετρέλαιο μειώνεται σταθερά κατά $6\,\tau.\mu.$, άρα έχουμε αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = -6$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 768 - 6 = 762$. Ο ν-οστός όρος της προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega \xLeftrightarrow[\omega=-6]{\beta_1=762} \beta_\nu = 762 - 6(\nu - 1) \Leftrightarrow$$

$\beta_\nu = 762 - 6\nu + 6 \Leftrightarrow \beta_\nu = -6\nu + 768.$ Άρα
$\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow -6\nu + 768 = 12 \Leftrightarrow 6\nu = 768 - 12 \Leftrightarrow$
$6\nu = 756 \Leftrightarrow \nu = 126,$ άρα 126 ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα $12\,\tau.\mu.$

ΘΕΜΑ 4_13092

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μία ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (*Μονάδες 6*)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται, ώστε κάθε μία ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από τη στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$.

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της. (*Μονάδες 6*)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (*Μονάδες 6*)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από τη στιγμή της επιδείνωσης; (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Ο αριθμός των βακτηρίων κάθε ώρα υποδιπλασιάζεται, άρα οι αριθμοί αυτοί είναι όροι μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$,

$\alpha_1 = 102400$ και γενικό τύπο

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$. Για $\nu = 6$ έχουμε

$\alpha_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$ βακτήρια.

β) i) Η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, αφού ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό με τον αριθμό 3, άρα ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. Για τον πρώτο όρο έχουμε

$\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$.

ii) Μετά από ν ώρες θα έχουμε

$\beta_\nu = \beta_1 \lambda^{\nu-1} = 9600 \cdot 3^{\nu-1}$ βακτήρια.

iii) Μετά από 3 ώρες θα έχουμε

$\beta_3 = 9600 \cdot 3^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$ βακτήρια.

ΘΕΜΑ 4_13093

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (*Μονάδες 4*)

β) Αν για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (*Μονάδες 6*)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. (*Μονάδες 7*)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν, ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι $\sqrt{10201} = 101$.) (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Ο 1ος επιβάτης θα πληρώσει 3 €, ο 2ος 3,5 €, ο 3ος 4 € και ο 4ος 4,5 €.

β) Οι αριθμοί $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 3{,}5,\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = 4{,}5, \ldots$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αφού ο κάθε όρος διαφέρει από τον προηγούμενο κατά τον ίδιο σταθερό αριθμό

$\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = \ldots = 0{,}5$.

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\nu=51}{\Longleftrightarrow} \alpha_{51} = \alpha_1 + 50\omega \underset{\omega=0,5}{\overset{\alpha_1=3}{\Longleftrightarrow}}$

$\alpha_{51} = 3 + 50 \cdot 0{,}5 \Leftrightarrow \alpha_{51} = 28$, άρα αν το λεωφορείο γεμίσει, ο 51ος επιβάτης θα πληρώσει 28 €.

δ) Αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, θα έκανε είσπραξη $30 \cdot 21 = 630$ €. Με την προσφορά, η είσπραξη θα είναι το άθροισμα των όρων της αριθμητικής προόδου, δηλαδή

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \underset{\omega=0,5}{\overset{\alpha_1=3}{=\!=\!=}} \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 3 + (\nu-1) \cdot 0{,}5\right] =$$

$= \frac{\nu}{2}(6 + 0{,}5\nu - 0{,}5) = \frac{\nu}{2}(0{,}5\nu + 5{,}5)$. Πρέπει

$$S_\nu > 630 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(0{,}5\nu + 5{,}5) > 630 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$0{,}5\nu^2+5{,}5\nu>1260 \Leftrightarrow 0{,}5\nu^2+5{,}5\nu-1260>0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$
$\nu^2+11\nu-2520>0.$

Το τριώνυμο $\nu^2+11\nu-2520$ έχει
$\varDelta=11^2-4\cdot 1\cdot(-2520)=121+10080=10201>0,$
άρα δύο ρίζες άνισες

$$\nu_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{10201}}{2}=\frac{-11\pm 101}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\nu_1=\dfrac{-11+101}{2}=\dfrac{90}{2}=45\\ \nu_2=\dfrac{-11-101}{2}=\dfrac{-112}{2}=-56\end{cases}.$$ Για να ισχύει

$\nu^2+11\nu-2520>0$, δηλαδή για να είναι το τριώνυμο $\nu^2+11\nu-2520$ ομόσημο του $\alpha=1>0$, πρέπει ο ν να βρίσκεται εκτός των ριζών του τριωνύμου, δηλαδή $\nu\in(-\infty,-56)\cup(45,+\infty)$.

Όμως $\nu\in\mathbb{N}$, άρα η ελάχιστη ακέραια τιμή για την οποία $\nu^2+11\nu-2520>0$ είναι το 46.
Επομένως πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

ΘΕΜΑ 4_13156

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.
Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1=x,\ \alpha_2=2x^2-3x-4,\ \alpha_3=x^2-2$$

όπου $x\in\mathbb{Z}$, τότε:

α) να αποδειχθεί ότι $x=3$. (*Μονάδες 10*)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (*Μονάδες 8*)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$S=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{15}$$ (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $\alpha_2=\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\Leftrightarrow 2x^2-3x-4=\dfrac{x+x^2-2}{2}\Leftrightarrow$

$4x^2-6x-8=x+x^2-2\Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0.$

$\varDelta=(-7)^2-4\cdot 3\cdot(-6)=49+72=121>0$, άρα δύο ρίζες άνισες

$$x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{121}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm 11}{6}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{7+11}{6}=\dfrac{18}{6}=3\in\mathbb{Z}\\ x_2=\dfrac{7-11}{6}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Άρα $x=3$.

β) Για $x=3$ έχουμε $\alpha_1=3,\ \alpha_2=5,\ \alpha_3=7$,
άρα $\omega=\alpha_2-\alpha_1=5-3=2$ και

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \underset{\omega=2}{\overset{\alpha_1=3}{\Longleftrightarrow}} \alpha_\nu=3+2(\nu-1)\Leftrightarrow \alpha_\nu=2\nu+1.$$

$\alpha_\nu=2014\Leftrightarrow 2\nu+1=2014\Leftrightarrow$

$2\nu=2013\Leftrightarrow \nu=\dfrac{2013}{2}\notin\mathbb{N}$, άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) Έχουμε $\alpha_{15}=2\cdot 15+1=31$ και οι αριθμοί $3,7,11,\ldots,31$ αποτελούν Α.Π. (β_ν) με
$\beta_1=\alpha_1=3$ και $\omega=\beta_2-\beta_1=7-3=4$, οπότε
$\beta_\nu=\beta_1+(\nu-1)\omega=3+4(\nu-1)=3+4\nu-4=4\nu-1.$
Έχουμε $\beta_\nu=31\Leftrightarrow 4\nu-1=31\Leftrightarrow 4\nu=32\Leftrightarrow \nu=8$,

επομένως $S_8=\dfrac{8(2\beta_1+7\omega)}{2}=4(2\cdot 3+7\cdot 4)=$

$=4(6+28)=4\cdot 34=136.$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_477

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f*. (*Μονάδες 7*)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης *f*. (*Μονάδες 9*)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης *f* με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Πρέπει $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$. Άρα $A=\mathbb{R}-\{3\}$.

β) Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες $x_1=2$ και $x_2=3$, οπότε $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ και

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}\overset{x\neq 3}{=}x-2.$$

γ) Είναι $f(0)=0-2=-2$, οπότε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,-2)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $(2,0)$.

ΘΕΜΑ 2_488

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της *A*. (*Μονάδες 5*)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (*Μονάδες 10*)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$$ (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Πρέπει

$$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 1 \text{ και } x\neq -1).$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

β) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$ και οι ρίζες του

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}, \\ x_2=1 \end{cases}$$

άρα το τριώνυμο γράφεται

$$2x^2-5x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=(2x-3)(x-1).$$

γ) Για κάθε $x\in A \Leftrightarrow x\neq \pm 1$ είναι

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\overset{x\neq 1}{=}\frac{2x-3}{x+1}.$$

ΘΕΜΑ 2_492

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$. (*Μονάδες 10*)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με τους άξονες. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Είναι $f(-1)+f(0)+f(1)=\left((-1)^2+2\cdot(-1)-15\right)+$

$+\left(0^2+2\cdot 0-15\right)+\left(1^2+2\cdot 1-15\right)=$

$=1-2-15-15+1+2-15=-43.$

β) Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,f(0))\equiv(0,-15)$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0$. Η διακρίνουσα είναι

$\Delta=2^2-4\cdot(-15)=4+60=64>0$, επομένως

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 8}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-5 \end{cases}.$$

Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $(-5,0)$ και $(3,0)$.

ΘΕΜΑ 2_510

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (*Μονάδες 8*)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (*Μονάδες 8*)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το

$(-\infty,3]\cup(3,10)=(-\infty,10)$.

β) Είναι $-1\le 3$ και $3\le 3$, άρα

$f(-1)=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$ και

$f(3)=2\cdot 3-5=6-5=1$.

Επίσης, $3<5$, άρα $f(5)=5^2=25$.

γ) $f(x)=25\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5=25, & x\le 3\\ & ή\\ x^2=25, & 3<x<10\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=15>3,\ \text{απορρίπτεται}\\ ή\\ x=5\in(3,10),\ \text{δεκτή, ή } x=-5\notin(3,10),\ \text{απορρίπτεται}\end{cases}$

Άρα $f(x)=25\Leftrightarrow x=5$.

ΘΕΜΑ 2_999

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6. (*Μονάδες 12*)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (*Μονάδες 5*)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{1}{x-3}$$ (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 1=25-24=1$ και οι ρίζες του

$x_{1,2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{2}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$. Άρα το τριώνυμο γράφεται

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

β) **i)** Πρέπει $x^2-5x+6\ne 0\Leftrightarrow(x\ne 2 \text{ και } x\ne 3)$.

Άρα $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

ii) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)}\overset{x\ne 2}{=\!=}\dfrac{1}{x-3}$

ΘΕΜΑ 2_1024

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των α,β. (*Μονάδες 13*)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Έχουμε $f(1)=6\Leftrightarrow\alpha+\beta=6\ (1)$ και

$f(-1)=4\Leftrightarrow-\alpha+\beta=4\ (2)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε $2\beta=10\Leftrightarrow\beta=5$. Για $\beta=5$ η σχέση (1) γίνεται $\alpha+5=6\Leftrightarrow\alpha=1$.

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=5$ η συνάρτηση έχει τύπο

$f(x)=x+5$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=5$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,5)$.

Για $y=f(x)=0$ έχουμε $0=x+5\Leftrightarrow x=-5$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-5,0)$.

ΘΕΜΑ 2_1042

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\ge 0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$. (*Μονάδες 13*)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Έχουμε $f(-1) \overset{-1<0}{=\!=} 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2$ και $f(3) \overset{3 \geq 0}{=\!=} 3 - 1 = 2$, άρα $f(-1) = f(3)$.

β) Έχουμε

$f(x) = 0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$,

δεκτή, αφού $-2 < 0$, και

$f(x) = 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δεκτή, αφού $1 \geq 0$.

Τελικά, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 1)$.

ΘΕΜΑ 2_1082

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f*. (*Μονάδες 15*)

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x^2 - x - 6 \neq 0$. Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$ και απορρίπτουμε τις λύσεις της. Έχουμε

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases},$$

άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το $A = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

β) Ισχύει $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-3)} \overset{x \neq -2}{=\!=} \dfrac{1}{x-3}$, άρα

$$f(2) + f(4) = \frac{1}{2-3} + \frac{1}{4-3} = -1 + 1 = 0.$$

ΘΕΜΑ 2_1090

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (*Μονάδες 13*)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού *α*, ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης *f*. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

β) Πρέπει $f(\alpha) = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha^2 - 1} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow$ $\alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = \pm 3$, δεκτές, αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 2_1096

Η απόσταση *y* (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη *A*, μετά από *x* λεπτά, δίνεται από τη σχέση $y = 35 + 0{,}8x$.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη *A* μετά από 25 λεπτά; (*Μονάδες 12*)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη *A*; (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Για $x = 25$ έχουμε $y = 35 + 0{,}8 \cdot 25 = 35 + 20 = 55$, άρα μετά από 25 λεπτά η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη *A* θα είναι 55 χιλιόμετρα.

β) Για $y = 75$ έχουμε

$75 = 35 + 0{,}8x \Leftrightarrow 75 - 35 = 0{,}8x \Leftrightarrow$

$40 = 0{,}8x \Leftrightarrow x = 50$, άρα, για να απέχει το αυτοκίνητο 75 χιλιόμετρα από την πόλη *A*, θα έχει κινηθεί 50 λεπτά.

ΘΕΜΑ 2_1293

Η θερμοκρασία *T* σε βαθμούς Κελσίου $({}^\circ\mathrm{C})$, σε βάθος *x* χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 7*)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290 °C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 10*)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440 °C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Για $x=30$ έχουμε

$T=15+25\cdot 30=15+750=765$ °C.

β) Για $T=290$ έχουμε

$290=15+25x \Leftrightarrow 275=25x \Leftrightarrow x=11$ χιλιόμετρα.

γ) $T>440 \Leftrightarrow 15+25x>440 \Leftrightarrow 25x>425 \Leftrightarrow x>17$, άρα, αν ένα σημείο έχει θερμοκρασία μεγαλύτερη από 440 °C, τότε αυτό βρίσκεται σε βάθος μεγαλύτερο των 17 χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης.

ΘΕΜΑ 2_1302

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με:

$$f(x)=\begin{cases} 8-x, & \text{αν } x<0 \\ 2x+5, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$. (*Μονάδες 13*)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $f(-5)\overset{-5<0}{=\!=}8-(-5)=8+5=13$ και

$f(4)\overset{4\geq 0}{=\!=}2\cdot 4+5=8+5=13$, άρα $f(-5)=f(4)$.

β) Για $x<0$ έχουμε

$f(x)=9 \Leftrightarrow 8-x=9 \Leftrightarrow x=-1$, δεκτή.

Για $x\geq 0$ έχουμε

$f(x)=9 \Leftrightarrow 2x+5=9 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$, δεκτή.

Τελικά, $f(x)=9$ για $x=-1$ ή $x=2$.

ΘΕΜΑ 2_1532

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* και να αποδείξετε ότι για τα *x* που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ισχύει $f(x)=x^2+4x$. (*Μονάδες 15*)

β) Να βρείτε τις τιμές του *x* για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Πρέπει $x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$, άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το $A=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$. Για $x\in A$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x(x^2-16)}{x-4}=\dfrac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=$

$=x(x+4)=x^2+4x$.

β) $f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0$.

$\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144$ και

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 12}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-4+12}{2}=\dfrac{8}{2}=4\notin A \\ x_2=\dfrac{-4-12}{2}=\dfrac{-16}{2}=-8\in A \end{cases}.$$ Τελικά, $x=-8$.

ΘΕΜΑ 2_1537

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$$ (*Μονάδες 10*)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α)
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2}=\dfrac{5}{2}$
- $f(1)=1+\dfrac{1}{1}=1+1=2$
- $f(2)=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

Άρα $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\dfrac{5}{2}+2-\dfrac{5}{2}=2$.

β) $f(x)=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 2x^2+2=5x \Leftrightarrow$

$2x^2-5x+2=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$ και

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{5\pm3}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2\\ x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases},$$

δεκτές.

ΘΕΜΑ 2_1542

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$A=x^3-x^2+3x-3$ (*Μονάδες 13*)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $A=x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=$

$=(x-1)(x^2+3)$

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=x\in\mathbb{R}^*$ και το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g=x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{3}{x}=x^2-x+3\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}3=x^3-x^2+3x\Leftrightarrow$

$x^3-x^2+3x-3=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}(x-1)(x^2+3)=0\Leftrightarrow$

$(x-1=0 \text{ ή } x^2+3=0)\Leftrightarrow(x=1 \text{ ή } x^2=-3, \text{ αδύνατη})$.

Για $x=1$ έχουμε $f(1)=g(1)=3$, άρα το κοινό σημείο είναι το $A(1,3)$.

ΘΕΜΑ 2_1553

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία, τα οποία να βρείτε. (*Μονάδες 13*)

β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A, B είναι συμμετρικά ως προς το O. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow$

$x(x^2-1)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow$

$(x=0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+1=0)\Leftrightarrow$

$(x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1)$

- Για $x=0$ έχουμε $f(0)=g(0)=0$, άρα το κοινό σημείο είναι το $O(0,0)$.
- Για $x=1$ έχουμε $f(1)=g(1)=1$, άρα το κοινό σημείο είναι το $A(1,1)$.
- Για $x=-1$ έχουμε $f(-1)=g(-1)=-1$, άρα το κοινό σημείο είναι το $B(-1,-1)$.

β) Τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,-1)$ έχουν τετμημένες και τεταγμένες αντίθετες, άρα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων O.

ΘΕΜΑ 2_3378

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (*Μονάδες 6*)

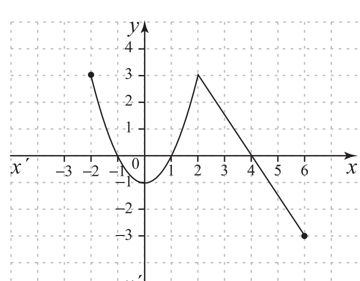
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

(*Μονάδες 6*)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (*Μονάδες 6*)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (*Μονάδες 7*)



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-2, 6]$.

β)

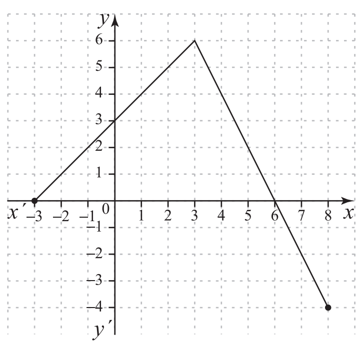
x	-2	-1	0	1	2	6
y	3	0	-1	0	3	-3

γ) Με άξονα $x'x$: $(-1, 0), (1, 0)$ και $(4, 0)$.

Με άξονα $y'y$: $(0, -1)$.

δ) $f(x)<0$, όταν $x\in(-1, 1)\cup(4, 6]$.

ΘΕΜΑ 2_3379



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (*Μονάδες 6*)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(*Μονάδες 6*)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (*Μονάδες 6*)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-3, 8]$.

β)

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Με άξονα $x'x$: $(-3, 0)$ και $(6, 0)$.

Με άξονα $y'y$: $(0, 3)$.

δ) $f(x)>0$ για $x\in(-3, 6)$.

ΘΕΜΑ 2_3381

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$:

α) να δείξετε ότι $\mu=-6$. (*Μονάδες 9*)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (*Μονάδες 9*)

γ) για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $g(1)=-4 \Leftrightarrow \dfrac{2\cdot 1^2-4\cdot 1+\mu}{1+1}=-4 \Leftrightarrow \dfrac{-2+\mu}{2}=-4 \Leftrightarrow$
$-2+\mu=-8 \Leftrightarrow \mu=-6$

β) Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$, άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $A=(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$.

γ) Για $\mu=-6$ έχουμε $g(x)=\dfrac{2x^2-4x-6}{x+1}$.

Το τριώνυμο $2x^2-4x-6$ έχει

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-6)=16+48=64$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm 8}{4}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{4+8}{4}=\dfrac{12}{4}=3 \\ x_2=\dfrac{4-8}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1 \end{cases}.$$

Άρα $2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$.

Ο τύπος της συνάρτησης g γράφεται

$$g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}=\frac{2(x+1)(x-3)}{x+1}\overset{x\neq -1}{=\!=}$$
$$=2(x-3)=2x-6.$$

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_1963

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2 \text{ και } g(x)=\lambda x+(1-\lambda),\ x\in\mathbb{R}$$

και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (*Μονάδες 8*)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (*Μονάδες 8*)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει $\left(x_1+x_2\right)^2=\left|x_1+x_2\right|+2$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Για να έχουν οι C_f και C_g ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, αρκεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Είναι

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2=\lambda x+(1-\lambda) \Leftrightarrow$

$x^2-\lambda x-(1-\lambda)=0 \quad (1)$.

Η διακρίνουσα της (1) είναι

$\Delta=(-\lambda)^2-4[-(1-\lambda)]=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2 \geq 0$.

Άρα η (1) έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

β) Πρέπει η (1) να έχει μία διπλή ρίζα, άρα

$\Delta=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$. Για $\lambda=2$ η (1) γίνεται $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το $A(1, f(1)) \equiv A(1,1)$.

γ) Για $\lambda \neq 2$ η (1) έχει δύο ρίζες με $x_1+x_2=S=\lambda$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$\left(x_1+x_2\right)^2=\left|x_1+x_2\right|+2 \Leftrightarrow \lambda^2=|\lambda|+2 \overset{\lambda^2=|\lambda|^2}{\Longleftrightarrow}$

$|\lambda|^2-|\lambda|-2=0$. Η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-1)^2-4\cdot(-2)=1+8=9$ και οι ρίζες

$\left(|\lambda|=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2} \text{ ή } |\lambda|=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\left(|\lambda|=2 \text{ ή } |\lambda|=-1, \text{ απορρίπτεται}\right)$. Άρα $|\lambda|=2 \Leftrightarrow$

$\left(\lambda=2, \text{ απορρίπτεται, αφού } \lambda \neq 2, \text{ ή } \lambda=-2, \text{ δεκτή}\right)$.

Τελικά, $\lambda=-2$.

ΘΕΜΑ 4_2084

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά $d\,cm$ ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)cm$.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (*Μονάδες 6*)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (*Μονάδες 12*)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Αν E_A είναι το εμβαδόν ενός πλακιδίου τύπου Α και E_B είναι το εμβαδόν ενός πλακιδίου τύπου Β, έχουμε $E_A(d)=d^2\,cm^2$ και $E_B=(d+1)^2\,cm^2$.

β) i) Αν E είναι το εμβαδόν της επιφάνειας, τότε

$$\left.\begin{array}{l} E=200E_A \\ E=128E_B \end{array}\right\} \Rightarrow 200E_A=128E_B \Rightarrow$$

$200d^2=128(d+1)^2 \Rightarrow$

$200d^2=128(d^2+2d+1) \Rightarrow$

$200d^2=128d^2+256d+128 \Rightarrow$

$72d^2-256d-128=0 \Rightarrow$

$8(9d^2-32d-16)=0 \Rightarrow$

$9d^2-32d-16=0$

Η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-32)^2-4\cdot 9\cdot(-16)=1024+576=1600$,

οπότε

$d=\dfrac{-(-32)-\sqrt{1600}}{2\cdot 9}=\dfrac{32-40}{18}=-\dfrac{8}{18}<0$,

απορρίπτεται, ή

$d=\dfrac{-(-32)+\sqrt{1600}}{2\cdot 9}=\dfrac{32+40}{18}=\dfrac{72}{18}=4$, δεκτή.

Άρα τα πλακάκια τύπου Α έχουν πλευρά $4cm$ και τα πλακάκια τύπου Β έχουν πλευρά $5cm$.

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$E=200E_A=200\cdot 4^2\,cm^2=3200\,cm^2$.

ΘΕΜΑ 4_2220 και 4_4861

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος (*h* σε *m*) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική *t* (σε *sec*) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$$

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (*Μονάδες 6*)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος. (*Μονάδες 8*)

γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή *t* μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5\left[1{,}21 - (t-1)^2\right]$$ (*Μονάδες 5*)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε *sec*) που το ύψος *h* της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $6{,}05m$. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) Είναι $h(0) = -5\cdot 0^2 + 10\cdot 0 + 1{,}05 = 1{,}05$ και παριστάνει το ύψος σε *m* από το οποίο εκτοξεύεται η μπάλα, $h(1) = -5\cdot 1^2 + 10\cdot 1 + 1{,}05 = 6{,}05$ και παριστάνει το ύψος σε *m* στο οποίο βρίσκεται η μπάλα 1 sec μετά την εκτόξευση και $h(2) = -5\cdot 2^2 + 10\cdot 2 + 1{,}05 = 1{,}05$ και παριστάνει το ύψος σε *m* στο οποίο βρίσκεται η μπάλα $2\,sec$ μετά την εκτόξευση.

β) Αν t_2 είναι η χρονική στιγμή που η μπάλα φτάνει στο έδαφος, τότε

$h(t_2) = 0 \Leftrightarrow -5t_2^2 + 10t_2 + 1{,}05 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 10^2 - 4\cdot(-5)\cdot 1{,}05 = 100 + 21 = 121$.

Επομένως $t_2 = \dfrac{-10+\sqrt{121}}{2\cdot(-5)} = \dfrac{-10+11}{-10} = -\dfrac{1}{10} < 0$,

απορρίπτεται, ή $t_2 = \dfrac{-10-\sqrt{121}}{2\cdot(-5)} = \dfrac{-21}{-10} = 2{,}1$.

Άρα η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος μετά από $2{,}1\,sec$.

γ) Έχουμε

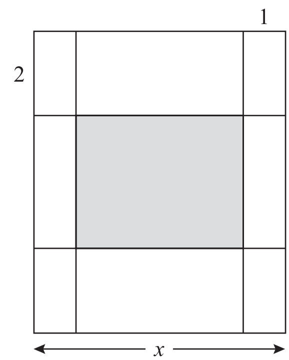
$$5\left[1{,}21 - (t-1)^2\right] = 5\left[1{,}21 - (t^2 - 2t + 1)\right] =$$
$$= 5(-t^2 + 2t + 0{,}21) = -5t^2 + 10t + 1{,}05 = h(t).$$

δ) Από το ερώτημα (γ) έχουμε

$$h(t) = 5\left[1{,}21 - (t-1)^2\right] =$$
$$= 6{,}05 - 5(t-1)^2 \overset{-5(t-1)^2 \le 0}{\le} 6{,}05.$$ Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή που το ύψος της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $6{,}05m$.

ΘΕΜΑ 4_2226

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\,cm$ $(5 \le x \le 10)$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια $2cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1cm$ δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν *E* της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x-2)(x-4)$$ (*Μονάδες 8*)

β) Να βρεθεί η τιμή του *x* ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35cm^2$. (*Μονάδες 7*)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά *x* του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24cm^2$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Αφαιρώντας τα περιθώρια από τις διαστάσεις του χαρτονιού, βρίσκουμε ότι η περιοχή τύπωσης είναι ορθογώνιο με ύψος $(x-4)$ και πλάτος $(x-2)cm$.

Άρα το εμβαδόν της είναι $E(x)=(x-2)(x-4)cm^2$.

β) Είναι $E(x)=35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=35 \Leftrightarrow$

$x^2-6x+8=35 \Leftrightarrow x^2-6x-27=0$.

Η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=36+108=144>0$, άρα

$x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\dfrac{6-12}{2}=-3<0$,

απορρίπτεται, ή

$x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\dfrac{6+12}{2}=9$, δεκτή.

Τελικά, $x=9$.

γ) Πρέπει $E(x)\geq 24 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)\geq 24 \Leftrightarrow$

$x^2-6x+8\geq 24 \Leftrightarrow x^2-6x-16\geq 0$.

Η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-6)^2-4\cdot(-16)\cdot 1=36+64=100>0$, άρα

$x_{1,2}=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{6\pm 10}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{6-10}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{6+10}{2}=8 \end{cases}.$$

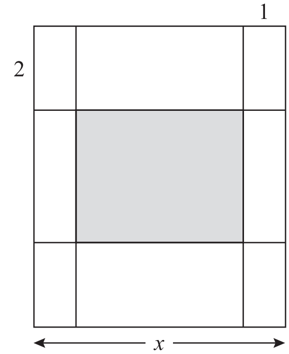
Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $x^2-6x-16$ είναι:

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in(-\infty,-2]\cup[8,+\infty)$ και, επειδή $5\leq x\leq 10$, έχουμε $8\leq x\leq 10$. Τελικά, η πλευρά του τετραγώνου θα πρέπει να είναι από $8\,cm$ έως και $10\,cm$, προκειμένου η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\,cm^2$.

ΘΕΜΑ 4_2229

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\,cm$ $(5\leq x\leq 10)$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια $2\,cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\,cm$ δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$E(x)=x^2-6x+8$ *(Μονάδες 8)*

β) Να βρεθεί η τιμή του x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24\,cm^2$. *(Μονάδες 7)*

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $35\,cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) Αφαιρώντας τα περιθώρια από τις διαστάσεις του χαρτονιού, βρίσκουμε ότι η περιοχή τύπωσης είναι ορθογώνιο με ύψος $(x-4)cm$ και πλάτος $(x-2)cm$. Άρα το εμβαδόν της είναι

$E(x)=(x-2)(x-4)=$

$=x^2-2x-4x+8=x^2-6x+8$.

β) Είναι $E(x)=24 \Leftrightarrow x^2-6x+8=24 \Leftrightarrow$

$x^2-6x-16=0$. Η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-6)^2-4\cdot(-16)\cdot 1=36+64=100>0$, άρα

$x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\dfrac{6-10}{2}=-2<0$,

απορρίπτεται, ή

$x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{10}}{2\cdot 1}=\dfrac{6+10}{2}=8$, δεκτή.

Τελικά, $x=8$.

γ) Πρέπει $E(x)\le 35 \Leftrightarrow x^2-6x+8\le 35 \Leftrightarrow$ $x^2-6x-27\le 0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=36+108=144>0$, άρα

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{6-12}{2}=-3\\ x_2=\dfrac{6+12}{2}=9\end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $x^2-6x-27$ είναι:

x	$-\infty$		-3		9		$+\infty$
$x^2-6x-27$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in[-3,9]$ και, επειδή $5\le x\le 10$, έχουμε $5\le x\le 9$. Τελικά, η πλευρά του τετραγώνου θα πρέπει να είναι από $5\,cm$ έως και $9\,cm$, προκειμένου η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να έχει εμβαδόν το πολύ $35\,cm^2$.

ΘΕΜΑ 4_2234

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $({}^oC)$ σε βαθμούς Φαρενάιτ $({}^oF)$, πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.*

Π2: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $({}^oC)$ σε βαθμούς Κέλβιν $({}^oK)$, προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου $({}^oC)$ το 273.*

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (*Μονάδες 8*)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν $({}^oK)$ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ $({}^oF)$ είναι η $K=\dfrac{F-32}{1,8}+273$. (*Μονάδες 7*)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ${}^oK$ μέχρι 283 ${}^oK$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ${}^oF$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Η πρόταση Π1 γράφεται $F=1,8C+32$ και η πρόταση Π2 γράφεται $K=C+273$.

β) Ισχύει $F=1,8C+32\Leftrightarrow 1,8C=F-32\Leftrightarrow$

$C=\dfrac{F-32}{1,8}$ (1).

Επίσης, $K=C+273\overset{(1)}{\Leftrightarrow}K=\dfrac{F-32}{1,8}+273$.

γ) Ισχύει

$$278\le K\le 283\Leftrightarrow 278\le\frac{F-32}{1,8}+273\le 283\Leftrightarrow$$

$$278-273\le\frac{F-32}{1,8}\le 283-273\Leftrightarrow$$

$$5\le\frac{F-32}{1,8}\le 10\Leftrightarrow 1,8\cdot 5\le F-32\le 10\cdot 1,8\Leftrightarrow$$

$$9\le F-32\le 18\Leftrightarrow 9+32\le F\le 18+32\Leftrightarrow$$

$$41\le F\le 50.$$

ΘΕΜΑ 4_2338

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$, με $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (*Μονάδες 7*)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α. (*Μονάδες 4*)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (*Μονάδες 4*)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $f(1)=\alpha-\alpha+2=2$

β) **i)** $f(1)=g(1)\overset{f(1)=2}{\Longleftrightarrow}2=1^2-\alpha+3\Leftrightarrow\alpha=2$

ii) $f(x)=g(x)\overset{\alpha=2}{\Leftrightarrow}2x-2+2=x^2-2+3\Leftrightarrow$

$x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$, άρα το σημείο $(1,2)$ είναι το μοναδικό σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g.

γ) Πρέπει η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει δύο ρίζες άνισες: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \alpha x-\alpha+2=x^2-\alpha+3\Leftrightarrow$ $x^2-\alpha x+1=0$.

Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες άνισες, πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha^2-4>0\Leftrightarrow(\alpha-2)(\alpha+2)>0$.

α	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
α^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\alpha\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_4545

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (*Μονάδες 6*)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=|x|-2$$ (*Μονάδες 9*)

γ) Για κάθε $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$$ (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Πρέπει $|x|-3\neq0\Leftrightarrow|x|\neq3\Leftrightarrow x\neq\pm3$, άρα $A=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

β) $x^2-5|x|+6=|x|^2-5|x|+6$. Θέτουμε $|x|=y$ και προκύπτει το τριώνυμο y^2-5y+6.

$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$, οπότε

$$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ y_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}.$$

Επομένως το τριώνυμο γίνεται

$y^2-5y+6=(y-2)(y-3)\overset{|x|=y}{=\!=}(|x|-2)(|x|-3)$.

Άρα $f(x)=\dfrac{(|x|-2)(|x|-3)}{|x|-3}\overset{x\neq\pm3}{=\!=}|x|-2$.

γ) $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0\Leftrightarrow$

$\left(f(x)\right)^2+4f(x)+4-4f(x)-5=0\Leftrightarrow$

$\left(f(x)\right)^2-1=0\Leftrightarrow\left(f(x)-1\right)\left(f(x)+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(f(x)=1 \text{ ή } f(x)=-1\right)\Leftrightarrow$

$\left(|x|-2=1 \text{ ή } |x|-2=-1\right)\Leftrightarrow$

$\left(|x|=3 \text{ ή } |x|=1\right)\Leftrightarrow\left(x=\pm3\notin A \text{ ή } x=\pm1\in A\right)$.

Τελικά, $x=\pm1$.

ΘΕΜΑ 4_4558

Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \text{με } \lambda>0$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$. (*Μονάδες 10*)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (*Μονάδες 4*)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq4$ για κάθε $\lambda>0$. (*Μονάδες 8*)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 3*)

Λύση

α) $\Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=$

$=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq0$, άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda>0$.

Επίσης, $P=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1>0$, επομένως το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες και για $\lambda>0$ το άθροισμα των ριζών $S=-\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, άρα το τριώνυμο έχει θετικές ρίζες για κάθε $\lambda>0$.

β) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου, τότε:

i) το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x_1 και x_2 είναι ίσο με $E = x_1 x_2 = P = 1$.

ii) η περίμετρος του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x_1 και x_2 είναι ίση με

$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) =$

$= 2S = 2\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda} = \dfrac{2\lambda^2+2}{\lambda}$.

Έχουμε $\Pi \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{2\lambda^2+2}{\lambda} \geq 4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} 2\lambda^2+2 \geq 4\lambda \Leftrightarrow$

$2\lambda^2 - 4\lambda + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$2(\lambda-1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

iii) Η περίμετρος παίρνει την ελάχιστη τιμή για $\lambda = 1$ και η διακρίνουσα Δ ισούται με μηδέν $(\Delta = 0)$, άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες $(x_1 = x_2)$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4_4575

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(*Μονάδες 7*)

β) Για $\alpha = 1$:

i) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(*Μονάδες 8*)

ii) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(*Μονάδες 5+5=10*)

Λύση

α) $f(2) = g(2) \Leftrightarrow 2^2 - 4\cdot 2 + \alpha = \alpha \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow$

$4 - 8 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$

β) i) $f(x) = g(x) \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow$

$x^2 - 5x + 6 = 0$.

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}.$$

ii) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε τις ρίζες του τριωνύμου, άρα ο πίνακας προσήμου του $x^2 - 5x + 6$ έχει τη μορφή:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$,

άρα $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_4656

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(*Μονάδες 10*)

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$,

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) $f(x) < y \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}.$$

Το τριώνυμο είναι αρνητικό, δηλαδή ετερόσημο του $\alpha=1>0$, για κάθε $x\in(-1,2)$.

γ) $|2x-1|<3\Leftrightarrow -3<2x-1<3\Leftrightarrow$

$-3+1<2x-1+1<3+1\Leftrightarrow -2<2x<4\overset{\div 2}{\Leftrightarrow}$

$-1<x<2$. Από το ερώτημα (β) ισχύει ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

ΘΕΜΑ 4_4660

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. *(Μονάδες 5)*

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. *(Μονάδες 10)*

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. *(Μονάδες 10)*

Λύση

α) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow$

$x^2-5x+4=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9>0$, άρα

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4\\ x_2=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}.$$

Έχουμε $f(4)=g(4)=8$ και $f(1)=g(1)=-1$, άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $(4,8)$ και $(1,-1)$.

β) $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-2x<3x-4\Leftrightarrow$

$x^2-5x+4<0$. Θέλουμε το τριώνυμο x^2-5x+4 να είναι αρνητικό, δηλαδή ετερόσημο του $\alpha=1>0$, οπότε θα πρέπει ο x να βρίσκεται εντός των ριζών του τριωνύμου, άρα $x^2-5x+4<0\Leftrightarrow x\in(1,4)$.

γ) Πρέπει $f(x)>y\Leftrightarrow x^2-2x>\alpha\Leftrightarrow$

$x^2-2x-\alpha>0$. Το τριώνυμο $x^2-2x-\alpha$ έχει

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-\alpha)=4+4\alpha=4\underbrace{(1+\alpha)}_{\alpha<-1\Leftrightarrow 1+\alpha<0}<0$,

άρα είναι πάντα ομόσημο του $\alpha=1$, δηλαδή είναι πάντα θετικό. Επομένως $f(x)>\alpha$ για κάθε $\alpha<-1$.

ΘΕΜΑ 4_4679

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. *(Μονάδες 10)*

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. *(Μονάδες 7)*

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. *(Μονάδες 8)*

Λύση

α) Πρέπει $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή

$\Delta\leq 0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4}\leq 0\Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0\Leftrightarrow\alpha\geq 1$.

β) i) $f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{1^2-1+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=1$ και

$f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$.

ii) $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ ή }x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow(x=1\text{ ή }x=0)$

ΘΕΜΑ 4_4682

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Μονάδες 10*)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (*Μονάδες 6*)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$$

να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\lambda - \lambda^2\right) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 =$

$= (2\lambda - 1)^2 \geq 0$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Πρέπει

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$.

γ) Πρέπει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 \leq 0$, ισχύει μόνο το ίσο με το μηδέν, άρα $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 4_4819

Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Μονάδες 10*)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (*Μονάδες 6*)

γ) Αν $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. (*Μονάδες 4*)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2),\ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),\ f(x_2 + 1)$$

(*Μονάδες 5*)

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\lambda - \lambda^2\right) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 =$

$= (2\lambda - 1)^2 \geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

γ) i) Η ανισοτική σχέση σπάει σε δύο επιμέρους σχέσεις:

$$\begin{cases} x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \text{και} \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 < x_1 + x_2 \\ \text{και} \\ x_1 + x_2 < 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{και} \\ x_1 < x_2 \end{cases},$$

που ισχύει

ii)
- Ισχύει $f(x_2) = 0$, αφού x_2 ρίζα του τριωνύμου.
- Αφού $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2$, θα ισχύει $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$, επειδή το τριώνυμο εντός των ριζών παίρνει τιμές ετερόσημες του $\alpha = 1 > 0$.
- Αφού $x_2 + 1 > x_2$, θα ισχύει $f(x_2 + 1) > 0$, επειδή το τριώνυμο εκτός των ριζών παίρνει τιμές ομόσημες του $\alpha = 1 > 0$.

Τελικά, $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$.

ΘΕΜΑ 4_4833

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (*Μονάδες 6*)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (*Μονάδες 6*)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$$

και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι, οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (*Μονάδες 6*)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Για $x=-5$ η (1) γίνεται

$$\lambda=\left[2\cdot(-5)+5\right]^2-8\cdot(-5)=$$

$$=(-10+5)^2+40=25+40=65.$$

β) Για $\lambda=20$ η (1) γίνεται $20=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow$

$20=4x^2+20x+25-8x \Leftrightarrow 4x^2+12x+5=0.$

$\Delta=12^2-4\cdot4\cdot5=144-80=64>0,$ επομένως

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot4}=\frac{-12\pm8}{8}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-12+8}{8}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-12-8}{8}=\dfrac{-20}{8}=-\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Άρα, για να εξαγάγει η μηχανή τον αριθμό 20, θα πρέπει να εισαγάγουμε ή τον αριθμό $-\dfrac{1}{2}$ ή τον αριθμό $-\dfrac{5}{2}$.

γ) $\lambda=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow \lambda=4x^2+20x+25-8x \Leftrightarrow$

$4x^2+12x+(25-\lambda)=0 \quad (2)$

i) Για $\lambda=5$ η (2) γίνεται

$4x^2+12x+(25-5)=0 \Leftrightarrow 4x^2+12x+20=0.$

$\Delta=12^2-4\cdot4\cdot20=144-320=-176<0,$ αδύνατη, άρα, οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

ii) Οι δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ είναι εκείνες οι τιμές του λ για τις οποίες έχει λύση η εξίσωση (2). Επομένως πρέπει

$\Delta\geq0 \Leftrightarrow 12^2-4\cdot4\cdot(25-\lambda)\geq0 \Leftrightarrow$

$144-400+16\lambda\geq0 \Leftrightarrow 16\lambda\geq256 \Leftrightarrow \lambda\geq16.$

ΘΕΜΑ 4_4862

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε έναν χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0{,}5x, & \text{αν } 0\leq x\leq30 \\ 0{,}7x+6, & \text{αν } x>30\end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (*Μονάδες 2*)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (*Μονάδες 3*)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (*Μονάδες 5*)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x)=12+0{,}6x$, για $x\geq0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στον λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο καθένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) **i)** Για $x=0\in[0,30]$ έχουμε

$$f(0)=12+0{,}5\cdot0=12 \text{ ευρώ}.$$

ii) Για $x=10\in[0,30]$ έχουμε

$$f(10)=12+0{,}5\cdot10=12+5=17 \text{ ευρώ}.$$

iii) Για $x=50>30$ έχουμε

$$f(50)=0{,}7\cdot50+6=35+6=41 \text{ ευρώ}.$$

β) Για $0\leq x\leq30$ έχουμε

$f(x)>g(x)\Leftrightarrow 12+0{,}5x>12+0{,}6x \Leftrightarrow x<0,$

αδύνατο, άρα $x\notin[0,30]$.

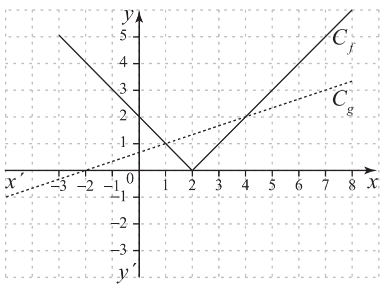
Για $x>30$ έχουμε

$f(x)>g(x)\Leftrightarrow 0{,}7x+6>12+0{,}6x \Leftrightarrow$

$0{,}1x>6 \Leftrightarrow x>60.$ Άρα ο καθένας από τους δύο κατοίκους κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

ΘΕΜΑ 4_4886

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. (*Μονάδες 6*)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (*Μονάδες 8*)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. (*Μονάδες 6*)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ) να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $K=\sqrt{3|x-2|-(x+2)}$. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Από τις γραφικές παραστάσεις των C_f και C_g προκύπτει ότι τα σημεία τομής τους είναι τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$.

β) Θα λύσουμε την εξίσωση

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow|x-2|=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow$

$3|x-2|=x+2$ (1).

- Αν $x-2<0\Leftrightarrow x<2$, τότε

  $3|\underbrace{x-2}_{(-)}|=x+2\Leftrightarrow 3(2-x)=x+2\Leftrightarrow$

  $6-3x=x+2\Leftrightarrow -4x=-4\Leftrightarrow x=1<2$, δεκτή λύση και για $x=1$, $f(1)=|1-2|=|-1|=1$, άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(1,1)$.

- Αν $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$, τότε

  $3|\underbrace{x-2}_{(+)}|=x+2\Leftrightarrow 3(x-2)=x+2\Leftrightarrow$

  $3x-6=x+2\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4\geq 2$, δεκτή λύση και για $x=4$, $f(4)=|4-2|=|2|=2$, άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $B(4,2)$.

γ) Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

δ) Πρέπει το υπόρριζο να είναι μη αρνητικό, δηλαδή

$3|x-2|-(x+2)\geq 0\Leftrightarrow 3|x-2|\geq x+2\overset{\div 3}{\Leftrightarrow}$

$|x-2|\geq\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\Leftrightarrow|x-2|\geq\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$,

οπότε η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού για $x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_4912

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (*Μονάδες 5*)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (*Μονάδες 10*)

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Για $\alpha=1$, $g(x)=x+1$, οπότε

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+1=x+1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow$

$x(x-1)=0\Leftrightarrow(x=0 \text{ ή } x=1)$.

- Για $x=0$, $f(0)=g(0)=1$.
- Για $x=1$, $f(1)=g(1)=2$.

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, για $\alpha=1$, είναι τα $(0,1)$ και $(1,2)$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow$ $x^2+1=x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0 \ (1)$.

Για να τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις σε δύο σημεία, θα πρέπει η (1) να έχει δύο λύσεις, άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot1\cdot(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow 1-4+4\alpha>0 \Leftrightarrow$ $4\alpha-3>0 \Leftrightarrow 4\alpha>3 \Leftrightarrow \alpha>\frac{3}{4}$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1), άρα $x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=1-\alpha<0$, για $\alpha>1$, οπότε είναι ετερόσημες.

ΘΕΜΑ 4_5275

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο $y=60+0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε *km* και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 *km*; (*Μονάδες 5*)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος για μία ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ; (*Μονάδες 5*)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y=80+0,10x$, όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε *km* και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μάς συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (*Μονάδες 10*)

δ) Αν $f(x)=60+0,20x$ και $g(x)=80+0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Για $x=400$, $y=60+0,20\cdot400=140$. Άρα ένας πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 *km* θα πληρώσει 140 ευρώ.

β) Για $y=150$,
$150=60+0,20x \Leftrightarrow 0,20x=90 \Leftrightarrow x=450\,km$.
Άρα ένας πελάτης ο οποίος για μία ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ οδήγησε $450\,km$.

γ) Για το ίδιο ταξίδι $x\,km$ η εταιρεία Α χρεώνει $60+0,20x$ ευρώ, ενώ η εταιρεία Β χρεώνει $80+0,10x$ ευρώ.
Έχουμε $60+0,20x\le80+0,10x \Leftrightarrow$ $0,10x\le20 \Leftrightarrow x\le200\,km$. Άρα για ταξίδια μικρότερα των $200\,km$ συμφέρει η εταιρεία Α, ενώ για ταξίδια μεγαλύτερα των $200\,km$ συμφέρει η εταιρεία Β. Για ταξίδια $200\,km$ οι τιμές είναι ίδιες.

δ) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 60+0,20x=80+0,10x \Leftrightarrow x=200$ και $f(200)=g(200)=100$.
Το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων είναι το $(200,100)$ και σημαίνει ότι, αν διανυθεί απόσταση $200\,km$, η χρέωση των δύο εταιρειών είναι ίδια και είναι 100 ευρώ.

ΘΕΜΑ 4_5879

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και τον λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο O.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο M με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο A που βρίσκεται μεταξύ του O και του M, με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\ge0$, η απόσταση του λαγού από το O τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το O τη στιγμή t *min* δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το O θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα M, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (*Μονάδες 10*)

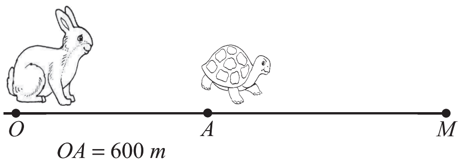
β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος

M από το O είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (*Μονάδες 5*)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12\,min$ και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (*Μονάδες 5*)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (*Μονάδες 5*)



Λύση

α) Η χελώνα προηγείται του λαγού αν και μόνο αν

$S_Λ(t) < S_X(t) \Leftrightarrow 10t^2 < 600 + 40t \Leftrightarrow$

$t^2 - 4t - 60 < 0$.

$Δ = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-60) = 256 > 0$, άρα

$$t_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{256}}{2} = \frac{4\pm 16}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{4+16}{2} = \dfrac{20}{2} = 10 \\ t_2 = \dfrac{4-16}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases}.$$

Ισχύει ότι $t^2 - 4t - 60 < 0$, δηλαδή το τριώνυμο $t^2 - 4t - 60$ είναι ετερόσημο του $α = 1 > 0$ για κάθε t εντός των ριζών, επομένως $t \in (-6, 10)$.

Το t εκφράζει χρόνο, άρα $t \in (0, 10)$. Επομένως για $t \in (0, 10)$ προηγείται η χελώνα. Για $t = 10 \Rightarrow$ $S_Λ(10) = S_X(10) = 1000$ μέτρα. Άρα, για να κερδίσει η χελώνα, το τέρμα M θα πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από 1000 μέτρα από το O.

β) i) $S_Λ(t) = S_X(t) \Leftrightarrow 10t^2 = 600 + 40t \Leftrightarrow$

$t^2 - 4t - 60 = 0 \Leftrightarrow (t = -6 \text{ ή } t = 10)$. Άρα ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή $t = 10\,min$.

(Η τιμή $t = -6$ απορρίπτεται, αφού t είναι χρόνος, άρα είναι πάντα μη αρνητικός.)

ii) $12 > 10$, άρα προηγείται ο λαγός. Έχουμε

$S_Λ(12) = 10\cdot 12^2 = 10\cdot 144 = 1440$ μέτρα και

$S_X(12) = 600 + 40\cdot 12 = 600 + 480 = 1080$

μέτρα, άρα τη χρονική στιγμή $t = 12\,min$ ο λαγός προηγείται της χελώνας κατά $1440 - 1080 = 360$ μέτρα.

iii) $S_Λ(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow$

$t = \pm 15$. Η αρνητική λύση απορρίπτεται, άρα ο λαγός τερματίζει πρώτος σε $15\,min$.

ΘΕΜΑ 4_5882

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 \text{ και } g(x) = |x-1| + 2, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (*Μονάδες 9*)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (*Μονάδες 4*)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x-1|^2 > 2^2 \Leftrightarrow$

$|x-1| > 2 \Leftrightarrow (x - 1 > 2 \text{ ή } x - 1 < -2) \Leftrightarrow$

$(x > 3 \text{ ή } x < -1)$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 \Rightarrow g(x) > 0$, άρα για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$

$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \overset{|x-1|=ω}{\Longleftrightarrow} ω^2 - ω - 6 = 0$, με $ω \geq 0$.

$Δ = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 25 > 0$, άρα έχει δύο ρίζες

άνισες $ω_{1,2} = \dfrac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2} = \dfrac{1\pm 5}{2} \Leftrightarrow$

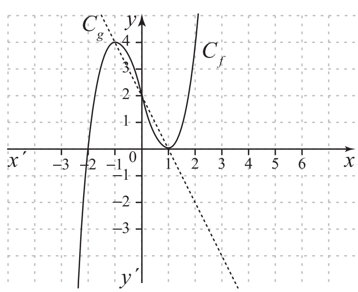
$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \omega_2 = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$. Η αρνητική ρίζα $\omega = -2$ απορρίπτεται, άρα $\omega = 3 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow$ $(x-1=3 \text{ ή } x-1=-3) \Leftrightarrow (x=4 \text{ ή } x=-2)$.

Ισχύει $f(-2) = g(-2) = 5$ και $f(4) = g(4) = 5$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία $(-2, 5)$ και $(4, 5)$.

ΘΕΜΑ 4_6146

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x+2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = -2x+2$$ *(Μονάδες 6)*

β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. *(Μονάδες 6)*

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. *(Μονάδες 6)*

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. *(Μονάδες 7)*

Λύση

α) Είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τη C_g, δηλαδή των σημείων $(-1, 4)$, $(0, 2)$ και $(1, 0)$, άρα $x=-1$, $x=0$ ή $x=1$.

β) $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$ και $f(1) = 0$.

γ) $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

δ) Πρέπει $f(x)+2x-2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x+2 \Leftrightarrow$ $f(x) \geq g(x)$. Αυτό συμβαίνει όταν η C_f είναι πάνω από τη C_g ή όταν οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται. Άρα $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_6228

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\ (A = 90°)$ με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$E(x) = \dfrac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x \in (0, 10)$. *(Μονάδες 9)*

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \dfrac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. *(Μονάδες 8)*

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\dfrac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$; *(Μονάδες 8)*

Λύση

Ισχύει $y = 10-x$. Επίσης, $x>0$ και $y>0 \Leftrightarrow 10-x>0 \Leftrightarrow x<10$. Άρα $x \in (0, 10)$.

α) $E = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x(10-x)}{2} = \dfrac{1}{2}(10x-x^2) \Leftrightarrow$

$E(x) = \dfrac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x \in (0, 10)$.

β) $E(x) \leq \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(-x^2+10x) \leq \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow$

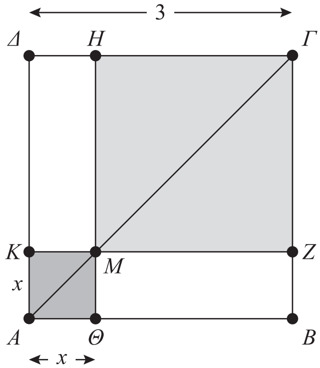
$-x^2+10x \leq 25 \Leftrightarrow x^2-10x+25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$, που ισχύει.

γ) $E(x) = \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x=5$.

Τότε, $y = 10-5 = 5$. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4_6231

Στο επόμενο σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$.

(*Μονάδες 9*)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

(*Μονάδες 8*)

γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Ισχύει ότι $(MZ) = (ΘB) = 3 - x$, με $x > 0$ και $x < 3$. Άρα το συνολικό εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων σχημάτων είναι

$$E = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9$$

με $x \in (0, 3)$.

β) $E \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(2x-3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

γ) $E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

<u>*Α΄ τρόπος*</u>: Αφού $x = \frac{3}{2}$, $(AΘ) = (ΘB)$. Τα παράλληλα τμήματα $ΑΔ$, $ΘΗ$, $ΒΓ$ ορίζουν ίσα τμήματα στην $ΑΒ$, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $ΑΓ$. Επομένως το M είναι μέσο της $ΑΓ$.

<u>*Β΄ τρόπος*</u>: Από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $AΘM$ ισχύει $(AM)^2 = 2x^2 \overset{x=\frac{3}{2}}{\Longleftrightarrow} (AM)^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$(AM)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (AM) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Επίσης,

$(AΓ)^2 = 2 \cdot 3^2 = 18 \Leftrightarrow (AΓ) = 3\sqrt{2} = 2(AM)$.

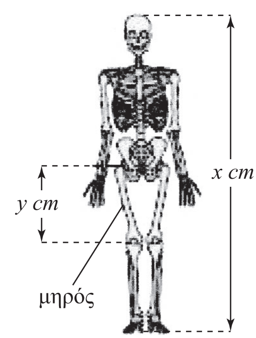
Άρα το M είναι μέσο του $ΑΓ$.

ΘΕΜΑ 4_7502

Οι ανθρωπολόγοι, για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0{,}43x - 26$

Άνδρας: $y = 0{,}45x - 31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38{,}5cm$ που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (*Μονάδες 8*)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου $164cm$. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42{,}8cm$ που ανήκει σε άνδρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(*Μονάδες 8*)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (*Μονάδες 9*)

Λύση

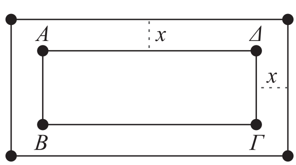
α) $y = 0{,}43x - 26 \overset{y=38{,}5}{\Longleftrightarrow} 38{,}5 = 0{,}43x - 26 \Leftrightarrow$
$0{,}43x = 64{,}5 \Leftrightarrow x = 150$. Άρα το ύψος της γυναίκας είναι $150\,cm$.

β) $y = 0{,}45x - 31 \overset{y=42{,}8}{\Longleftrightarrow} 42{,}8 = 0{,}45x - 31 \Leftrightarrow$
$0{,}45x = 73{,}8 \Leftrightarrow x = 164$. Το ύψος του άνδρα στον οποίο ανήκει το μηριαίο οστό είναι ίδιο με το ύψος του άνδρα στον οποίο εκτιμάται ότι ανήκουν τα οστά χεριού, άρα είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ) Λύνουμε την εξίσωση
$0{,}43x - 26 = 0{,}45x - 31 \Leftrightarrow 0{,}02x = 5 \Leftrightarrow x = 250$.
Άρα αυτό συμβαίνει όταν ο άνδρας και η γυναίκα έχουν ύψος $250\,cm$. Το ύψος αυτό δεν είναι φυσιολογικό, άρα μάλλον ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους δεν μπορούν να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

ΘΕΜΑ 4_7511

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με διαστάσεις $15\,m$ και $25\,m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x\,m\ (x>0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση $E(x) = 4x^2 + 80x,\ x>0$. (*Μονάδες 9*)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $E = 500\,m^2$. (*Μονάδες 7*)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\,m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Οι πλευρές της περίφραξης της ζώνης, που είναι οι πλευρές του εξωτερικού ορθογωνίου του δοθέντος σχήματος, έχουν μήκη $2x+25$ και $2x+15$.
Άρα $E(x) = (2x+25)(2x+15) - 25\cdot 15 =$
$= 4x^2 + 30x + 50x + 25\cdot 15 - 25\cdot 15 = 4x^2 + 80x$,
$x > 0$.

β) $E(x) = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow$
$x^2 + 20x - 125 = 0$.
$Δ = 20^2 - 4\cdot 1\cdot(-125) = 400 + 500 = 900 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2\cdot 1} = \frac{-20\pm 30}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-20+30}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-20-30}{2} = \dfrac{-50}{2} = -25 \end{cases}.$$

Η αρνητική λύση απορρίπτεται, άρα $x = 5\,m$.

γ) Λύνουμε την ανίσωση
$E(x) < 500 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0\ \ (1)$.
Αφού $α = 1 > 0$, η (1) ισχύει για κάθε
$x \in (-25, 5)$. Όμως $x > 0$, άρα $x \in (0, 5)$.

ΘΕΜΑ 4_7512

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $Π = 40\,cm$. Αν $x\,cm$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (*Μονάδες 4*)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$. (*Μονάδες 8*)

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (*Μονάδες 6*)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\,cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\,cm$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Αν y είναι το πλάτος του παραλληλογράμμου, τότε $2(x+y) = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$.
Όμως $y > 0 \Leftrightarrow 20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20$.
Επίσης, αφού το x εκφράζει μήκος, προκύπτει $0 < x < 20$.

β) $E(x)=x(20-x)=20x-x^2$

γ) $E(x)\leq 100 \Leftrightarrow 20x-x^2\leq 100 \Leftrightarrow$

$x^2-20x+100\geq 0 \Leftrightarrow (x-10)^2\geq 0$, που ισχύει.

δ) Το μέγιστο εμβαδόν σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι $100\,cm^2$.

$E(x)=100 \Leftrightarrow (x-10)^2=0 \Leftrightarrow x=10$, άρα $y=20-10=10$. Επομένως από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\,cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\,cm$.

ΘΕΜΑ 4_7517

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.ά.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόνερ τον μήνα. (*Μονάδες 5*)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ τον μήνα. (*Μονάδες 5*)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά. (*Μονάδες 7*)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $K(v)=6500+15v,\ v\in\mathbb{N}$

β) $E(v)=25v,\ v\in\mathbb{N}$

γ) i) Για να μην έχει η επιχείρηση ζημιά, θα πρέπει να ισχύει $K(v)\geq E(v)\Leftrightarrow 6500+15v\geq 25v \Leftrightarrow$ $10v\geq 6500 \Leftrightarrow v\geq 650$, δηλαδή, για να μην έχει η επιχείρηση ζημιά, θα πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 650 τόνερ τον μήνα.

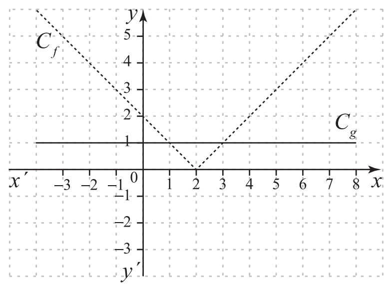
ii) Το κέρδος της επιχείρησης ορίζεται ως η διαφορά $E(v)-K(v)$, άρα

$E(v)-K(v)\geq 500 \Leftrightarrow 25v-6500-15v\geq 500 \Leftrightarrow$ $10v-6500\geq 500 \Leftrightarrow 10v\geq 7000 \Leftrightarrow v\geq 700.$

Συνεπώς η επιχείρηση πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 700 τόνερ, για να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

ΘΕΜΑ 4_7784

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g. (*Μονάδες 10*)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (*Μονάδες 10*)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Από τη γραφική παράσταση των f και g φαίνεται ότι:

i) τα σημεία τομής είναι τα $(1,1)$ και $(3,1)$,

ii) η C_f είναι κάτω από τη C_g για κάθε $x\in(1,3)$.

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow$

$(x-2=1 \text{ ή } x-2=-1)\Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=1)$

- Για $x=1$, $f(1)=g(1)=1$, άρα το σημείο τομής είναι το $(1,1)$.
- Για $x=3$, $f(3)=g(3)=1$, άρα το σημείο το-

μής είναι το $(3, 1)$.

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow$

$-1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, άρα η C_f είναι κάτω από τη C_g για κάθε $x \in (1, 3)$.

γ) Πρέπει $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow |x-2| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και

$1 - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} x \in [1, 3]$. Συναληθεύοντας έχουμε $x \in [1, 2) \cup (2, 3]$.

ΘΕΜΑ 4_8451

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4x^2 - 2(\alpha+3)x + 3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της *f*. (*Μονάδες 5*)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε *x* που ανήκει στο πεδίο ορισμού της *f*. (*Μονάδες 8*)

γ) Να βρεθεί η τιμή του *α* αν η γραφική παράσταση της *f* διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (*Μονάδες 7*)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της *f* με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Πρέπει $2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$, άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το $A = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

β) Έχουμε

$4x^2 - 2(\alpha+3)x + 3\alpha = 4x^2 - 2\alpha x - 6x + 3\alpha =$

$= 2x(2x-\alpha) - 3(2x-\alpha) = (2x-\alpha)(2x-3)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ ισχύει

$f(x) = \dfrac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3} = 2x - \alpha$.

γ) Πρέπει $f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

δ) • Για τον $x'x$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\alpha}{2}$, με $x \neq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2} \neq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3$. Το σημείο τομής με τον $x'x$ υπάρχει αν $\alpha \neq 3$ και είναι το $\left(\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$.

• Για τον $y'y$: $f(0) = 2 \cdot 0 - \alpha = -\alpha$.

Το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $(0, -\alpha)$.

ΘΕΜΑ 4_13084

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των *κ* και *λ*. (*Μονάδες 9*)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της *g*. (*Μονάδες 9*)

ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha+3) > g(\alpha)$, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Πρέπει ο παρονομαστής $x^2 + \kappa x + \lambda$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 1. Οι ρίζες έχουν άθροισμα $S = -2 + 1 = -1$ και γινόμενο $P = -2 \cdot 1 = -2$, οπότε

$S = -1 \Leftrightarrow -\dfrac{\kappa}{1} = -1 \Leftrightarrow \kappa = 1$ και

$P = -2 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda}{1} = -2 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

β) i) $g(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2} =$

$= \dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$

ii) $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$(x+1 = 0 \text{ ή } x-2 = 0) \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 2)$

και το πρόσημο του τριωνύμου

$(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Έτσι, για $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$ έχουμε

$g(\alpha)<0$. Επίσης,
$-1<\alpha<2 \Leftrightarrow -1+3<\alpha+3<2+3 \Leftrightarrow 2<\alpha+3<5$,
άρα $g(\alpha+3)>0$. Τελικά, $g(\alpha+3)>g(\alpha)$.

ΘΕΜΑ 4_13085

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (*Μονάδες 9*)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (*Μονάδες 9*)

ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$, όταν $\alpha, \beta \in(-1,1)\cup(1,2)$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Πρέπει ο παρονομαστής $x^2+\kappa x+\lambda$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 1. Οι ρίζες έχουν άθροισμα $S=-2+1=-1$ και γινόμενο $P=-2\cdot 1=-2$, οπότε

$S=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{\kappa}{1}=-1 \Leftrightarrow \kappa=1$ και

$P=-2 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda}{1}=-2 \Leftrightarrow \lambda=-2$.

β) i) $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}=$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)$

ii) $g(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1=0 \text{ ή } x-2=0) \Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=2)$

και το πρόσημο του τριωνύμου

$(x+1)(x-2)=x^2-2x+x-2=x^2-x-2$

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Έτσι, για $\alpha, \beta\in(-1,1)\cup(1,2)$ έχουμε

$g(\alpha)<0$ και $g(\beta)<0$, άρα $g(\alpha)g(\beta)>0$.

ΘΕΜΑ 4_13090

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2+3x+2 \text{ και } g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f*, *g* έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (*Μονάδες 10*)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f*, *h* έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f*, *h* δεν έχουν κοινά σημεία. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1 \Leftrightarrow$

$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$, άρα ένα μόνο κοινό σημείο. Για $x=-1$ έχουμε $g(-1)=0$, άρα το κοινό σημείο είναι το $(-1,0)$.

β) i) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha \Leftrightarrow$

$x^2+2x+(2-\alpha)=0$.

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(2-\alpha)=4-8+4\alpha=$

$=4\alpha-4=4(\alpha-1)>0$, αφού $\alpha>1$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f*, *h* έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Ομοίως, αν $\alpha<1$, τότε $\Delta<0$ και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f*, *h* δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 4_13158

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12{,}5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ) από τη συνάρτηση $E(x)=15{,}5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 6*)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (*Μονάδες 4*)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν, ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση). (*Μονάδες 6*)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Η επιχείρηση έχει έξοδα τα οποία προκύπτουν από τη συνάρτηση $K(x)=12{,}5x+120$ για $x=0$, δηλαδή $K(0)=120$ ευρώ.

β) Ο αριθμός 12,5 εκφράζει το κόστος κατασκευής για κάθε μπλουζάκι και το 15,5 εκφράζει τα έσοδα πώλησης από κάθε μπλουζάκι, δηλαδή την τιμή πώλησής του.

γ) Πρέπει $K(x)=E(x)\Leftrightarrow 12{,}5x+120=15{,}5x\Leftrightarrow$ $15{,}5x-12{,}5x=120\Leftrightarrow 3x=120\Leftrightarrow x=40$, δηλαδή πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια για να έχουν έσοδα ίσα με τα έξοδα.

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, θα έχουν κέρδος, αφού το κόστος για τα 60 μπλουζάκια είναι $K(60)=12{,}5\cdot 60+120=750+120=870$ ευρώ, ενώ τα έσοδα από την πώλησή τους είναι $E(60)=15{,}5\cdot 60=930$ ευρώ, δηλαδή τα έσοδα είναι περισσότερα από τα έξοδα.

ΕΥΘΕΙΑ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_1283

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3. (*Μονάδες 8*)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (*Μονάδες 9*)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Έχουμε $\Delta=2^2-4\cdot(-3)\cdot 1=4+12=16>0$ και

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}.$$

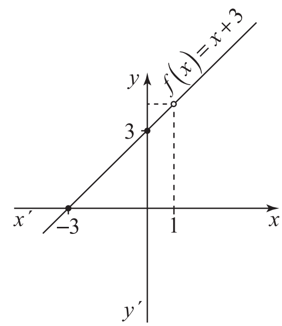
Άρα $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

β) Πρέπει $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$, άρα $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3.$$

γ) Για $x=0$, $f(0)=3$, άρα $(0,3)$.

Για $y=0$, $0=x+3\Rightarrow x=-3$, άρα $(-3,0)$.



ΘΕΜΑ 2_1529

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=5$ και $f(1)=3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$. (*Μονάδες 10*)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x΄x$ και $y΄y$. (*Μονάδες 7*)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (*Μονάδες 8*)

Λύση

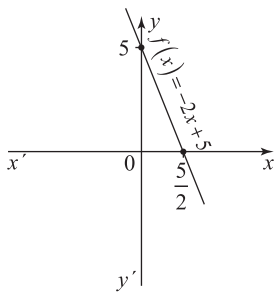
α) $f(0)=5 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=5$ και

$f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1+\beta=3 \overset{\beta=5}{\Leftrightarrow} \alpha+5=3 \Leftrightarrow \alpha=-2.$

β) Για $x=0$ έχουμε $f(0)=5$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,5)$.

Για $y=f(x)=0$ έχουμε $0=-2x+5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{5}{2},0\right)$.

γ)



ΘΕΜΑ 2_2212

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (*Μονάδες 10*)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in A$. (*Μονάδες 10*)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$. (*Μονάδες 5*)

Λύση

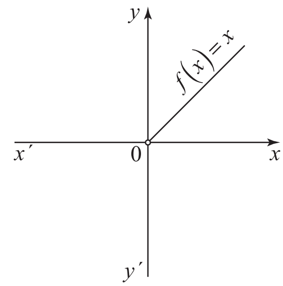
α) Πρέπει $2|x|-6\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \pm 3$, άρα

$A=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

β) $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6} \overset{x^2=|x|^2}{=\!=} \dfrac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6}=$

$=\dfrac{2|x|(|x|-3)}{2(|x|-3)}=|x|$

γ) Για $x>0$ έχουμε $|x|=x$, άρα $f(x)=x$.



4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_2046

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ, όταν κολυμπάει πεταλούδα, καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες; (*Μονάδες 5*)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει τον χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι $f(x)=30-\frac{3}{4}x$. (*Μονάδες 7*)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (*Μονάδες 4*)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Στα 32 λεπτά ύπτιο ο αθλητής θα κάψει $9\cdot 32=288$ θερμίδες. Για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες, πρέπει να κάψει ακόμα $360-288=72$ θερμίδες κολυμπώντας πεταλούδα. Αν y ο χρόνος (σε λεπτά) που θα κολυμπήσει πεταλούδα, πρέπει $12y=72 \Leftrightarrow y=6$.

β) i) Σε x λεπτά ύπτιο ο αθλητής θα κάψει $9x$ θερμίδες. Αν $f(x)$ ο χρόνος (σε λεπτά) που θα κολυμπήσει πεταλούδα, για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες, πρέπει

$$9x+12f(x)=360 \Leftrightarrow 12f(x)=360-9x \Leftrightarrow$$

$$f(x)=30-\frac{3}{4}x.$$

ii) Επειδή και η εξαρτημένη και η ανεξάρτητη μεταβλητή εκφράζουν χρόνο, πρέπει $x \geq 0$ και

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow 30 \geq \frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$

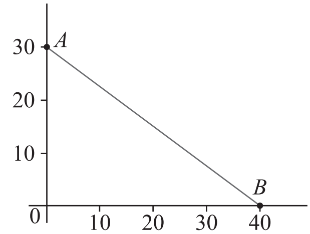
$120 \geq 3x \Leftrightarrow x \leq 40$. Άρα $0 \leq x \leq 40$, δηλαδή το πεδίο ορισμού της είναι το $A=[0, 40]$.

γ) Το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $A(0, f(0)) \equiv A(0, 30)$ και αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο αθλητής κολυμπάει μόνο πεταλούδα. Για το σημείο τομής B με τον $x'x$ έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=30 \Leftrightarrow$$

$3x=120 \Leftrightarrow x=40$. Άρα το σημείο είναι το $B(40, 0)$ και αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο αθλητής κολυμπάει μόνο ύπτιο.

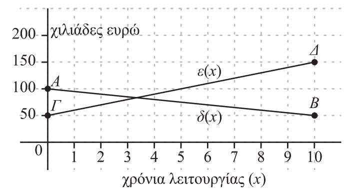
Η γραφική παράσταση της f είναι το τμήμα AB της ευθείας $y=30-\frac{3}{4}x$.



ΘΕΜΑ 4_2339

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (*Μονάδες 4*)

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (*Μονάδες 15*)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) Έσοδα: $\varepsilon(5)=100$ χιλιάδες ευρώ.

Δαπάνες: $\delta(5)=75$ χιλιάδες ευρώ.

β) i) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των οποίων ζητούνται οι τύποι είναι ευθείες, οπότε έχουμε:

- $\varepsilon(x)=\alpha x+\beta \overset{\Gamma(0,50)}{\Longleftrightarrow} 50=\beta$, επομένως

  $\varepsilon(x)=\alpha x+50 \overset{\Delta(10,150)}{\Longleftrightarrow} 150=10\alpha+50 \Leftrightarrow \alpha=10$,

  άρα $\varepsilon(x)=10x+50$ και

  $\varepsilon(5)=10\cdot 5+50=100$, σωστή η εκτίμηση στο ερώτημα (α).

- $\delta(x)=\alpha x+\beta \overset{A(0,100)}{\Longleftrightarrow} 100=\beta$, επομένως

  $\delta(x)=\alpha x+100 \overset{B(10,50)}{\Longleftrightarrow} 50=10\alpha+100 \Leftrightarrow \alpha=-5$, άρα $\delta(x) = -5x + 100$ και

$\delta(5) = -5 \cdot 5 + 100 = 75$, σωστή η εκτίμηση στο ερώτημα (α).

ii) $\varepsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow 10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow$

$15x = 50 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{3}$ και

$\varepsilon\left(\dfrac{10}{3}\right) = 10 \cdot \dfrac{10}{3} + 50 = \dfrac{250}{3}$, άρα το σημείο τομής είναι το $\Sigma\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{250}{3}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι, όταν τα έτη λειτουργίας της εταιρείας θα είναι $\dfrac{10}{3}$, τα έσοδα της εταιρείας θα είναι ίσα με τα έξοδα.

ΘΕΜΑ 4_4657

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$. *(Μονάδες 3)*

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. *(Μονάδες 5)*

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 4)*

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *(Μονάδες 5)*

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. *(Μονάδες 8)*

Λύση

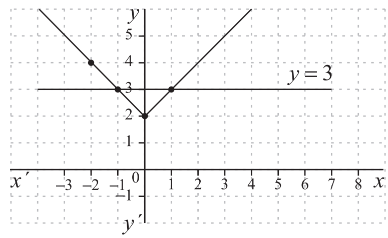
α) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 2$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$.

β) i) • Αν $x < 0$:

x	-1	-2
$f(x)$	3	4

• Αν $x \geq 0$:

x	0	1
$f(x)$	2	3



Τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y = 3$ είναι τα $(-1, 3)$ και $(1, 3)$.

ii) Τα σημεία $(-1, 3)$ και $(1, 3)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$, γιατί έχουν ίσες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες.

γ) i) Από τη γραφική παράσταση του (βi) προκύπτει ότι η f παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 2, καθώς και ότι η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, άρα οποιαδήποτε ευθεία, εκτός από την $y = 2$, παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη C_f σε ένα σημείο θα την τέμνει και στο συμμετρικό του ως προς τον $y'y$. Τελικά, πρέπει $\alpha > 2$.

ii) • $f(x) = \alpha \overset{x<0}{\Leftrightarrow} -x + 2 = \alpha \Leftrightarrow x = 2 - \alpha$, για να ισχύει, πρέπει $2 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$, που ισχύει από (γi), άρα το σημείο είναι το $(2 - \alpha, \alpha)$.

• $f(x) = \alpha \overset{x\geq0}{\Leftrightarrow} x + 2 = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha - 2$, για να ισχύει, πρέπει $\alpha - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 2$, που ισχύει από (γi), άρα το σημείο είναι το $(\alpha - 2, \alpha)$.

Τα σημεία $(2 - \alpha, \alpha)$ και $(\alpha - 2, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ για κάθε $\alpha > 2$, αφού έχουν ίσες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες, άρα ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii).

ΘΕΜΑ 4_6229

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα «RED» χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα «YELLOW» χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

(*Μονάδες 3*)

$x(km)$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

(*Μονάδες 3*)

$x(km)$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$. (*Μονάδες 8*)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (*Μονάδες 8*)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

(*Μονάδες 3*)

Λύση

α) i) $f(x)=0{,}6x+1$ με $x\in[0,15)$. Από τον τύπο έχουμε $f(0)=1$,

$f(2)=0{,}6\cdot 2+1=1{,}2+1=2{,}2$,

$f(8)=0{,}6\cdot 8+1=4{,}8+1=5{,}8$. Άρα:

$x(km)$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) $g(x)=0{,}4x+2$ με $x\in[0,15)$. Έχουμε

$g(x)=2\Leftrightarrow 0{,}4x+2=2\Leftrightarrow x=0$,

$g(x)=3{,}2\Leftrightarrow 0{,}4x+2=3{,}2\Leftrightarrow$

$0{,}4x=1{,}2\Leftrightarrow x=3$,

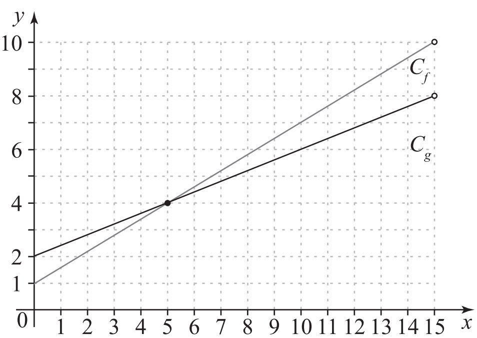
$g(x)=4{,}8\Leftrightarrow 0{,}4x+2=4{,}8\Leftrightarrow$

$0{,}4x=2{,}8\Leftrightarrow x=7$.

$x(km)$	0	3	7
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Οι f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,15)$, αφού αναφερόμαστε σε αποστάσεις που είναι μικρότερες από 15 χιλιόμετρα. (Οι τύποι έχουν βρεθεί στο (α) ερώτημα.)

γ) Για $x=15$, $f(15)=10$ και $g(15)=8$



Από τις γραφικές παραστάσεις των f και g προκύπτει ότι από 0 έως 5 χιλιόμετρα η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g, άρα $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in[0,5)$. Αυτό σημαίνει ότι για αποστάσεις μέχρι 5 χιλιόμετρα είναι πιο οικονομική η εταιρεία «RED».

δ) Αν ο Β διανύσει x χιλιόμετρα, τότε ο Α θα διανύσει $x+3$ χιλιόμετρα. Έχουμε

$f(x+3)-f(x)=0{,}6(x+3)+1-(0{,}6x+1)=$

$=0{,}6x+1{,}8+1-0{,}6x-1=1{,}8$.

Άρα ο Α θα πληρώσει 1,8 ευρώ παραπάνω από τον Β.

ΘΕΜΑ 4_8448

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (*Μονάδες 5*)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

(*Μονάδες 7*)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (*Μονάδες 8*)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Πρέπει $|2-x|\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

β) Έχουμε $x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6=$
$=x(x-3)-2(x-3)=(x-3)(x-2)$.

- Για $x>2, |2-x|=-2+x$ και

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{-2+x}=\frac{(x-3)(x-2)}{x-2}=x-3.$$

- Για $x<2, |2-x|=2-x$ και

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2-x}=\frac{(x-3)(x-2)}{-(x-2)}=$$

$$=-(x-3)=-x+3.$$

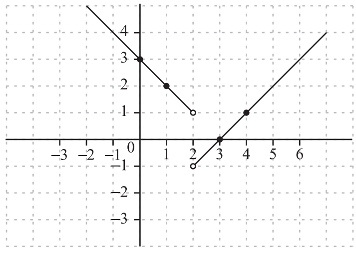
Άρα $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

γ) Για $x<2$, $f(x)=-x+3$:

x	0	1
$f(x)$	3	2

Για $x>2$, $f(x)=x-3$:

x	3	4
$f(x)$	0	1

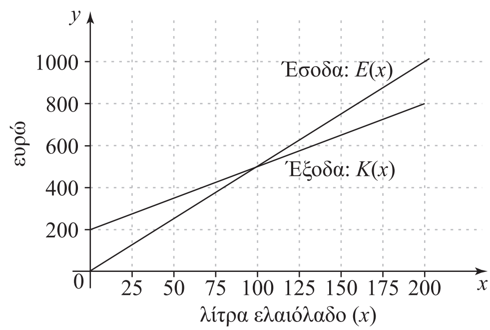


Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $(3,0)$ και με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,3)$.

δ) • Για $x<2$: $f(x)\le 0 \Leftrightarrow -x+3\le 0 \Leftrightarrow x\ge 3$, άρα δεν υπάρχουν λύσεις.

• Για $x>2$: $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x-3\le 0 \Leftrightarrow x\le 3$ και συναληθεύοντας βρίσκουμε $2<x\le 3$.

ΘΕΜΑ 4_10774



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε έναν μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (*Μονάδες 6*)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (*Μονάδες 5*)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά; (*Μονάδες 6*)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $(100, 500)$, δηλαδή, όταν η εταιρεία πουλάει 100 λίτρα λαδιού, τα έσοδα είναι 500 ευρώ και τόσα είναι και τα έξοδα.

β) Τα πάγια έξοδα της εταιρείας προκύπτουν από το σημείο τομής της συνάρτησης των εξόδων με τον άξονα $y'y$ και είναι 200 ευρώ.

γ) Πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα.

δ) Και οι δύο συναρτήσεις είναι ευθείες, άρα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$. Η ευθεία των εσόδων διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επομένως είναι της μορφής $y=\alpha x$, άρα $E(x)=\alpha x$. Το σημείο $(100, 500)$ ανήκει στην $E(x)$, επομένως $E(100)=500 \Leftrightarrow 100\alpha=500 \Leftrightarrow \alpha=5$, άρα $E(x)=5x$. Η ευθεία των εξόδων τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, 200)$, επομένως είναι της μορφής $y=\alpha x+200$, άρα $K(x)=\alpha x+200$.

Το σημείο $(100, 500)$ ανήκει στην $K(x)$, άρα $K(100)=500 \Leftrightarrow 100\alpha+200=500 \Leftrightarrow$ $100\alpha=300 \Leftrightarrow \alpha=3$, άρα $K(x)=3x+200$.

Για να μην έχει ζημιά η εταιρεία, πρέπει $E(x)\geq K(x) \Leftrightarrow 5x\geq 3x+200 \Leftrightarrow$ $2x\geq 200 \Leftrightarrow x\geq 100$, όπως βρήκαμε και στο ερώτημα (γ).

ΘΕΜΑ 4_13155

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=4x+2 \text{ και } g(x)=x^2-9$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$. (*Μονάδες 6*)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$. (*Μονάδες 4*)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (*Μονάδες 8*)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$, άρα τα σημεία είναι $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

β) $f(3)=4\cdot 3+2=14\neq 0$ και $f(-3)=4\cdot(-3)+2=-10\neq 0$, άρα η C_f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα παραπάνω σημεία.

γ) Έχουμε $f(0)=2$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$ ενώ $g(0)=-9\neq 2$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων δεν τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ και από το ερώτημα (β) δεν τέμνονται ούτε πάνω στον $x'x$. Τελικά, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) $h(x)=\alpha x+\beta \overset{A(0,3)}{\Longleftrightarrow} 3=\beta$, άρα $h(x)=\alpha x+3$.

Η C_g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο $(3, 0)$, άρα και η C_h διέρχεται από το $(3, 0)$. Επομένως $h(x)=\alpha x+3 \overset{(3,0)}{\Leftrightarrow} 0=3\alpha+3 \Leftrightarrow \alpha=-1$. Τελικά, $h(x)=-x+3$.